Spécialité : devoir sur feuille n° 2

I

Une personne loue un local à partir du 1er janvier 2007. Elle a le choix entre deux formules de contrat. Dans les deux cas, le loyer annuel initial (c'est-à-dire le loyer payé en 2007) est 24 000 € et le locataire s'engage à occuper le local pendant neuf années complètes.

1. 1. **Contrat 1** : Le loyer annuel augmente de 4 % par an. On note u_0 le loyer payé la première année, c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et u_n le loyer payé en l'année $(2007+n)$.
   Le loyer annuel augmente de 4 % par an.
   (a) Calculer u_1 le loyer payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n . En déduire la nature de la suite (u_n) et donner ses caractéristiques.
   (c) Donner l'expression de u_n en fonction de n. En déduire u_8 à 10^{-2} près.
   (d) Calculer la somme totale payée à l'issue des neuf années de contrat. Arrondir à 10^{-2} près.
   (e) Déterminer à partir de quelle année le loyer annuel dépassera 36 000 euros.
2. **Contrat 2** : Le loyer annuel augmente de 1 500 € par an.
   On note v_0 le loyer payé la première année, c'est-à-dire le loyer payé en 2007 et v_n le loyer payé en l'année $(2007+n)$.
   Le loyer annuel augmente de 1 500 € par an.
   (a) Calculer v_1 le loyer payé lors de la deuxième année.
   (b) Exprimer $vn+1$ en fonction de v_n . En déduire la nature de la suite (v_n) et donner ses caractéristiques.
   (c) Donner l'expression de v_n en fonction de n. En déduire v_8.
   (d) Calculer la somme totale payée à l'issue des neuf années de contrat.
   (e) Déterminer à partir de quelle année le loyer annuel double.
3. **Bilan** : quel est le contrat le plus intéressant ?

II

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par : $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1.$$

1. (a) Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.
   (b) Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.
2. (a) Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$u_n \leqslant n+3.$$
   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n,
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n).$$
   (c) En déduire une validation de la conjecture précédente.
3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.
   (b) En déduire que pour tout entier naturel n,
   $$u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$$
   (c) Déterminer la limite de la suite (u_n).
4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose :
   $$S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n \quad \text{et} \quad T_n = \frac{S_n}{n^2}.$$
   (a) Exprimer S_n en fonction de n.
   (b) Déterminer la limite de la suite (T_n).

III

1. Montrer que, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$, $\dfrac{1}{k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a
$\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \dfrac{1}{k^2} \leqslant 1$.

3. En déduire que la suite (u_n) définie par
$u_n = \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^3} + \dfrac{1}{4^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2} = \displaystyle\sum_{k=2}^{k=n} \dfrac{1}{k^2}$ est convergente.

IV

Soit f la fonction définie sur $]-1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x+1}.$$

1. Étudier les variations de la fonction f.

2. En déduire que, pour tout x>-1, on a : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x+1} \geqslant 1$.

V

A. Étude de fonction

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,30]$ par :

$$f(x) = 0,4x + 1 + \mathrm{e}^{-0,4x+1}.$$

1. Montrer que, pour tout x dans $[0;\,30]$, on a : $f'(x) = 0,4(1 - \mathrm{e}^{-04x+1})$. (rappel : si u est dérivable, $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u\mathrm{e}^u$)

2. Résoudre dans $[0;30]$ l'inéquation

$$1 - \mathrm{e}^{-04x+1} > 0.$$

3. En déduire les variations de f sur $[0;\,30]$.
On donnera l'arrondi à 10^{-2} de $f(0)$ et de $f(30)$.

B. Application économique

Une entreprise fabrique des paquets de cartes à l'effigie de joueurs de football. On note x le nombre de paquets fabriqués, en centaine, avec $0 \leqslant x \leqslant 30$, et on suppose que le coût de fabrication est égal, en centaine d'euros, à $f(x)$, où f est la fonction définie dans la partie A.

1. Calculer le coût de fabrication de 100 paquets, puis de 2 000 paquets, à l'euro près.

2. On suppose que chaque paquet est vendu 2 €.
   (a) Soit x dans $[0;\,30]$. Montrer que la différence $B(x)$ entre le chiffre d'affaires et le coût de fabrication est de la forme :
   $mx + p - \mathrm{e}^{-0,4x+1}$, où m et p sont des réels à préciser.
   (b) Déterminer les variations de la fonction B ainsi définie sur $[0;30]$.
   (c) À l'aide de la calculatrice, indiquer à partir de combien de paquets l'entreprise réalise un bénéfice, au paquet près.