

Équations différentielles et primitives

Table des matières

I	Équation différentielle	1
II	Équation différentielle $y' = f$	2
II.1	Primitive d'une fonction continue	2
II.2	Primitives des fonctions usuelles	3
II.3	Primitives et opérations :	4
III	Équations différentielles $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$, avec $a \neq 0$	4
III.1	Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \neq 0$	4
III.2	Résolution de $y' = ay + b$, $a \neq 0$	5
III.3	Résolution de $y' = ay + f$, $a \neq 0$	6

Activité A page 286

1. Soit $f(x) = 3e^{2x}$.
 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3 \times 2e^{2x} = 6e^{2x}$.
 Par conséquent : $f'(x) - 2f(x) = 6e^{2x} - 6e^{2x} = 0$ donc $f' - 2f = 0$.

2. Soit l'équation $y' = 4y - 6$.
 - (a) $f(x) = 3e^{4x} + \frac{3}{2}$; $f'(x) = 12e^{4x}$ et $4f(x) - 6 = 12e^{4x} + 6 - 6 = 12e^{4x}$ donc $f' = 4f - 6$.
 f vérifie cette équation.
 - (b) $g(x) = 4e^x - 6$
 $g'(x) = 4e^x$; $4g(x) - 6 = 16e^x - 24 - 6 = 16e^x - 30$ donc $g' \neq 4g - 6$; g ne vérifie pas cette équation.
 - (c) $h(x) = 5e^{4x} + \frac{3}{2}$
 $h'(x) = 5 \times 4e^{4x} = 20e^{4x}$; $4h(x) - 6 = 20e^{4x} + 6 - 6 = 20e^{4x}$.
 $h' = 4h - 6$ donc h est solution de cette équation.

I Équation différentielle



Définition

On appelle équation différentielle une équation à une inconnue dont l'inconnue est une **fonction** et faisant intervenir la fonction, sa dérivée et éventuellement les dérivées d'ordre deux, trois, etc.

Exemples

- a) $y' = y$, équation différentielle dont la fonction exponentielle est une solution car $\exp' = \exp$
- b) Équation du pendule simple : une masse est suspendue à un fil de longueur L à l'équilibre, donc verticalement.
 On écarte la masse de sa position d'équilibre et on note θ l'angle formé avec la verticale.
 Cet angle dépend de t et vérifie l'équation différentielle $\theta'' - \frac{g}{L} \sin \theta = 0$ (qu'on ne sait pas résoudre, si ce n'est de manière approchée!)

II Équation différentielle $y' = f$

f est une fonction continue sur un intervalle I .

II.1 Primitive d'une fonction continue



Définition

Soit F une fonction définie sur I . On dit que F est une primitive de f sur I si F est dérivable sur I et $F' = f$.

On dit alors que F est une solution de l'équation différentielle $y' = f$, appelée équation différentielle, d'inconnue y .

Exemples :

a Soit l'équation différentielle $y' = x^2$. (remarque, on commet un abus de langage, car x^2 est un nombre, pas une fonction).

Soit $F(x) = \frac{1}{3}x^3$; $F'(x) = \frac{1}{3} \times 3x^2 = x^2$ donc F est solution de l'équation différentielle $y' = x^2$.

b Soit l'équation différentielle $y' = \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$;

F définie par $F(x) = \ln x$ est solution de cette équation différentielle car $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.



Théorème (admis)

| Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur cet intervalle.



Théorème

| Deux primitives d'une même fonction sur un intervalle diffèrent d'une constante.

Démonstration.

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

- Soit F une primitive de f donc $F' = f$.
Soit $k \in \mathbb{R}$ une constante. $(F + k)' = F' + 0 = f$ donc $F + k$ est aussi une primitive de f .
- Soient F et G deux primitives de f sur I .
Alors $F' = f$ et $G' = f$.
 $G - F$ est dérivable; $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$ donc $(G - F)' = 0$.
 $G - F$ est donc constant; $G - F = k$ d'où $G = F + k$, $k \in \mathbb{R}$.

Propriété

On considère l'équation différentielle $y' = f$.

Soient x_0 et y_0 deux réels.

Il existe une unique solution de cette équation différentielle, donc une unique primitive F de f , telle que $F(x_0) = y_0$

Démonstration :

f est continue, donc admet une primitive F . Les autres primitives de f sont de la forme $F + k$.
On doit avoir $F(x_0) = y_0$ donc $k = y_0 - F(x_0)$; k est donc unique et la primitive aussi.

Exemple : soit $f(x) = e^{3x}$.

Une primitive de f est $F(x) = \frac{1}{3}e^{3x}$ car $F'(x) = 3e^{3x}$.

Il y a une seule primitive G de f vérifiant $G(0) = -1$.

$G(x) = F(x) + k = \frac{1}{3}e^{3x} + k$; $G(0) = -1 \Leftrightarrow k = -\frac{1}{3}$ donc $G(x) = \frac{1}{3}e^{3x} - \frac{1}{3}$

II.2 Primitives des fonctions usuelles

Par lecture inverse du tableau des dérivées des fonctions usuelles, on obtient les résultats suivants :

Fonction	une primitive	validité
$f(x) = a \in \mathbb{R}$	$F(x) = ax$	\mathbb{R}
$f(x) = x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$	\mathbb{R}^*
$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$F(x) = \sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$	\mathbb{R}
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x$	\mathbb{R}
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x$	\mathbb{R}
Hors-programme : $f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	$F(x) = \tan x$	$]\left(2k-1\right)\frac{\pi}{2}; \left(2k+1\right)\frac{\pi}{2}[, k \in \mathbb{Z}$

II.3 Primitives et opérations :

Soient u et v deux fonctions admettant des primitives respectives U et V sur un intervalle I et g une fonction admettant une primitive G sur un intervalle J contenant l'intervalle $u(I)$.

On note u' la dérivée de u .

Fonction	une primitive	validité
$f = \alpha u + \beta v ((\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2)$	$F = \alpha U + \beta V$	I
$f = u' \times g \circ u$	$F = G \circ u$	I
$f = u' u^n (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	I
$f = \frac{u'}{u}$	$\ln u $	u ne s'annule pas sur I
$f = \frac{u'}{u^n}, n \in \mathbb{N}, n > 1$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}$	u ne s'annule pas sur I
$f = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$F = \sqrt{u}$	$u > 0$ sur I
$f = u' e^u$	$F = e^u$	
$f = u' \cos(u)$	$\sin(u)$	I
$f = u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	I

Cela vient des formules de dérivation.

Exemple :

Résoudre l'équation différentielle $y' = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$ (E).

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

f est continue sur \mathbb{R} donc f admet des primitives sur \mathbb{R} .

On remarque que $f(x) = x \times \frac{1}{(x^2 + 1)^2}$.

Posons $u(x) = x^2 + 1$; alors $u'(x) = 2x$.

On voit que $f = \frac{1}{2} u'(x) \times \frac{1}{u^2}$ dont une primitive est $F = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{u}\right)$.

Par conséquent : $F(x) = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{x^2 + 1} = \boxed{-\frac{1}{2(x^2 + 1)}}$

III Équations différentielles $y' = ay + b$ et $y' = ay + f$, avec $a \neq 0$

III.1 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$, $a \neq 0$



Définition

L'équation différentielle $y' = ay$ qui s'écrit aussi $y' - ay = 0$ où a et b sont des réels est appelée équation différentielle linéaire homogène de premier ordre à coefficients constants.

Propriété

Les solutions de l'équation différentielle (E) $y' = ay$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $y(x) = ke^{ax}$, où k est un réel quelconque.

Pour tous réels x_0 et y_0 , il existe une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$

Démonstration.

- Soient k un réel et y la fonction définie par $y = ke^{ax}$.

Alors $y'(x) = k \times ae^{ax} = a \times y(x)$ donc $y' = ay$.

y est bien une solution de cette équation (E)

- **Réciproquement :**

Soit y une solution de (E) donc $y' = ay$.

On considère la fonction g définie par $g(x) = y(x)e^{-ax}$.

g est dérivable et $g'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x) \times (-ae^{-ax}) = ay(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = 0$.

Pour tout x , $g' = 0$ donc g est une fonction constante.

Il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $g = k$ donc $g(x) = k$ pour tout x .

Or $g(x) = y(x)e^{-ax}$, donc $y(x)e^{-ax} = k$.

On en déduit : $y(x) = ke^{ax}$.

Propriété

Soient y_1 et y_2 deux solutions de (E) et k un réel.

Alors $y_1 + y_2$ et ky_1 sont aussi solutions de (E).

III.2 Résolution de $y' = ay + b$, $a \neq 0$

Définition

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + b$ ou $y' - ay = b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants.

Propriété

Les solutions de (E) : $y' = ay + b$ ou $y' - ay = b$ sont les fonctions définies sur \mathbb{R} par $x \mapsto ke^{ax} - \frac{b}{a}$.

Remarque : les solutions s'obtiennent en ajoutant une solution particulière constante aux solutions de l'équation homogène $y' = ay$ associée.

Démonstration : Soit (E) l'équation différentielle $y' = ay + b$ ($b \neq 0$).

- On commence par chercher une fonction constante φ solution de cette équation.

$\varphi(x) = k$; $\varphi'(x) = 0$ donc φ est solution. de (E) si, et seulement si, pour tout x , $0 = a\varphi(x) + b \Leftrightarrow 0 = ak + b$

donc $k = -\frac{b}{a}$.

- Soit y une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

y est solution de (E) si, et seulement si, $y' = ay + b$ donc, pour tout x , $y(x) = ay(x) + b$.

$y - \varphi$ est dérivable et $(y - \varphi)' = y' - \varphi' = (ay + b) - (a\varphi + b) = ay + b - a\varphi - b = a(y - \varphi)$.

On en déduit que $y - \varphi$ est solution de l'équation différentielle $(E_0) : y' - ay = 0$.

D'après le paragraphe précédent, on obtient : $(y - \varphi)(x) = ke^{ax}$ donc $y(x) = ke^{ax} + \varphi(x)$, c'est-à-dire :

$$y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$$

- Les solutions de (E) sont donc les fonctions définies par $y(x) = ke^{ax} - \frac{b}{a}$, $k \in \mathbb{R}$

Exemple : soit (E) : $y' = 3y - 2$.

$y' = ay + b$ avec $a = 3$ et $b = 2$.

Les solutions de cette équation différentielle sont les fonctions : $y \mapsto y(x) = ke^{3x} - \frac{2}{3}$.

III.3 Résolution de $y' = ay + f$, $a \neq 0$



Définition

L'équation différentielle (E) : $y' = ay + f$ ou $y' - ay = f$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.



Propriété

Soit φ une solution particulière de (E).

Alors y est une solution de (E) si, et seulement si, $y - \varphi$ est une solution de l'équation différentielle homogène associée $y' = ay$.

Exemple :

Soit l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x + 1$.

On note φ une fonction affine qui est une solution particulière de (E).

À l'aide de φ , résoudre (E).

1. On pose $\varphi(x) = mx + p$ (fonction affine).

$$\varphi \text{ est solution de (E)} \Leftrightarrow 2m + 3(mx + p) = 6x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 3m = 6 \\ 2m + p = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 2 \\ p = -1 \end{cases}.$$

On en déduit $\varphi(x) = 2x - 1$.

2. L'équation homogène associée est $2y' + 3y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{3}{2}y$.

Les solutions sont $x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x}$, $k \in \mathbb{R}$.

Les solutions de l'équation (E) sont donc $x \mapsto ke^{-\frac{3}{2}x} + 2x - 1$