Spécialité : devoir sur feuille n° 5

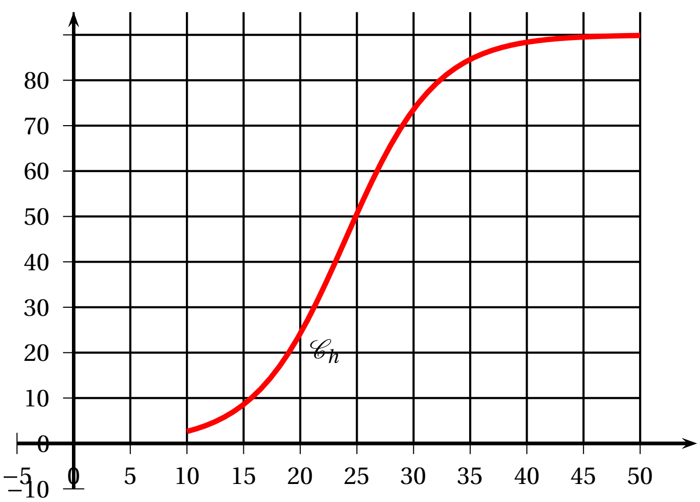
I Fonction de satisfaction

On appelle fonction « satisfaction » toute fonction dérivable qui prend des valeurs comprises entre 0 et 100 (donc $f(x) \in [0\,;\,100]$).
Lorsque la fonction « satisfaction » atteint la valeur 100, on dit qu'i y a « saturation ».

On définit aussi la fonction « envie » qui est la dérivée de la fonction « satisfaction ».
La direction des ressources humaines d'une entreprise modélise la satisfaction d'un salarié en fonction du salaire annuel qu'il perçoit. On admet que la fonction satisfaction« » h est définie sur l'intervalle $[10\,;\,50]$ par :

$$h(x) = \frac{90}{1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}}.$$

Où x est exprimé en milliers d'euros.
On note $\mathscr{C}_h$ la courbe représentative de la fonction h, représentée ci-dessous.



1. Par lecture graphique, conjecturer la convexité de la fonction h ainsi que le sens de variation de la fonction « envie ». En donner une interprétation concrète.
2. D'après ce modèle, serait-il possible d'atteindre la saturation ? Justifier.
3. Vérifier que, pour tout $x \in [10\,;\,50]$:

$$H''(x) = \frac{5,625\mathrm{e}^{-0,25x+6}\left(\mathrm{e}^{-0,25x+6}-1\right)}{\left(1+\mathrm{e}^{-0,25x+6}\right)^3}.$$

4. Étudier la convexité de la fonction h.
5. À partir de quel salaire annuel peut-on estimer que la fonction « envie » décroît ? Justifier.

II

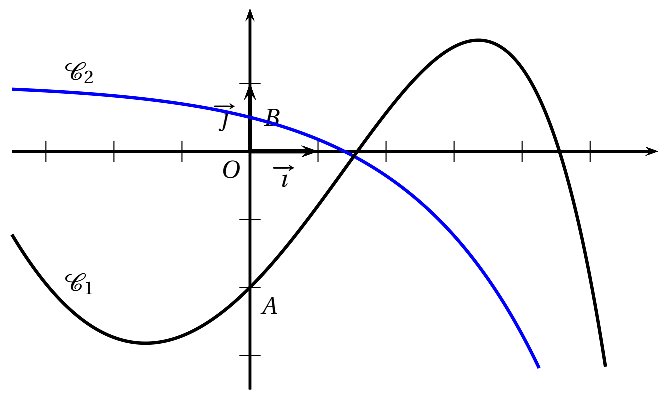
Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ dont le tableau de variations est donné ci-dessous où a et b désignent deux réels.

x	$-\infty$	a	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	b	↘ $-\infty$

1. Déterminer le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.
2. Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, on a tracé deux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_1$.

   Elles coupent l'axe des ordonnées aux points A et B d'ordonnées -2 et $\frac{1}{2}$ respectivement.

   L'une de ces courbes est la courbe représentative de la fonction dérivée f' de f et l'autre la courbe représentative d'une primitive F de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



   (a) Indiquer laquelle de ces deux courbes est la courbe représentative de la fonction f'. Justifier la réponse.

   (b) À l'aide des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$, prouver que $1 < a < 2$ et $b > 0$. (Indication : utiliser le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a)

3. Dans cette question, on admet que la fonction f est telle que, pour tout réel x,

$$f(x) - 2f'(x) = x.$$

   (a) Déterminer une fonction affine g telle que pour tout réel x, $g(x) - 2g'(x) = x$.

   (b) Démontrer que la fonction $f - g$ est une solution de l'équation différentielle

$$y' = \frac{1}{2}y.$$

   (c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'existence d'un réel k tel que pour tout réel x, $f(x) = k\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x} + x + 2$.

   (d) En utilisant les coordonnées des points A et B, déterminer les fonctions f et F ainsi que les réels a et b.

III L'équation logistique de Verhulst (mathématicien belge, 1804-1849 (voir ici))

Le modèle de Verhulst décrit l'évolution d'une population (animale ou humaine).

On note $p(t)$ la population, en millier d'individus, au temps t, en année, Comme les ressources (place, nourriture, etc.) sont limitées, on suppose que cette population admet une valeur maximum m et que l'accroissement de la population pendant un petit intervalle de temps est « proportionnel » à la fois à :

- l'intervalle de temps,
- à la population $p(t)$ (plus il y a d'individus, plus il y a de naissances),
- à l'écart entre population théorique maximum et population actuelle $m - p(t)$ (quand on approche du maximum de la population, la nourriture disponible devient rare et la mortalité augmente).

On suppose donc que la fonction p est solution de l'équation différentielle, dite logistique :

(E_1) : $y' = ay(m-y)$ où a est une constante réelle positive.

On suppose que pour tout réel t, $p(t)$ et $m - p(t)$ sont des nombres réels strictement positifs.

1. 1. On pose $g = \dfrac{1}{p}$.
   Démontrer que p est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si g est solution d'une équation différentielle (E_2) de la forme $y' = \alpha y + \beta$ où α et β sont deux réels que l'on précisera.
2. Résoudre l'équation (E_2) et en déduire que l'expression de la fonction p est de la forme :
   $$p(t) = \frac{m}{1 + C\mathrm{e}^{-\alpha m t}} \text{ avec } C \in \mathbb{R}.$$
3. La population des États-Unis de 1790 à 1910 a été étudiée par Pearl et Reed en 1920.
   Avec l'origine des temps en 1790, les valeurs des paramètres sont alors données par $m = 197\,273$ (en milliers d'individus), $C = 49,2$ et
   $\alpha = 158 \times 10^{-9}$.
   (a) Étudier les variations de la fonction p.
   (b) Déterminer la limite de p en $+\infty$ et donner l'allure de la courbe représentative de la fonction p.
   (c) Selon ce modèle, à quelle date la population maximum sera-t-elle atteinte à un million près ? (Indication : cela revient à chercher pour quelle valeur de t on a : $p(t) \geqslant 196\,273$)

IV Satellites

En raison des frottements avec l'atmosphère résiduelle terrestre, les satellites en orbite basse perdent progressivement de l'altitude et finissent par se consumer dans les couches les plus denses de l'atmosphère. Cet évènement est appelé rentrée atmosphérique.

Le temps, exprimé en jours, avant la rentrée atmosphérique dépend des caractéristiques du satellite et de l'altitude h de son orbite, exprimée en kilomètres.

Pour un satellite donné, ce temps est modélisé par une fonction T de la variable h, définie et dérivable sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$.

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

A Étude d'un premier satellite

On admet que la fonction T, associée à ce premier satellite, est une solution de l'équation différentielle (E) suivante dans laquelle y désigne une fonction de la variable h définie et dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et y' la fonction dérivée de y : (E) : $40y' - y = 0$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E) sur $[0~;~+\infty[$.
2. Déterminer la fonction T solution de l'équation différentielle (E) qui vérifie la condition $T(800) = 2000$.

B Étude d'un deuxième satellite

Dans cette partie, on admet que la fonction T, associée à un deuxième satellite, est définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par : $T(h) = K \times 0,012\mathrm{e}^{0,025(h-150)}$.

Le nombre réel K est appelé coefficient balistique du satellite.

On considère l'algorithme suivant, en langage Python

```
from   math import*
def    fonction_coefficient(K,h):
       return(K*0.012*exp(0.025*(h-150))
K=0
while  fonction_coefficient(K,500)<1400:
       K=K+0.5
print(K)
```

1. Quel est le rôle de cet algorithme ?
2. Quelle valeur K affiche-t-il en sortie ?

C Hubble

Le satellite Hubble a un coefficient balistique K égal à 11. La fonction T, associée à ce satellite, est donc définie sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$ par
$$T(h) = 0,132\mathrm{e}^{0,025(h-150)}.$$

1. L'orbite du satellite Hubble est située à l'altitude h de 575 km. Calculer le temps $T(h)$ restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble. Arrondir au jour près.
2. On souhaite étudier l'effet d'une augmentation de 10 km de l'altitude h sur le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.
   (a) Montrer que $T(h+10) = \mathrm{e}^{0,25} \times T(h)$.
   (b) En déduire qu'augmenter l'altitude h de 10 km revient à augmenter d'environ 28 % le temps restant avant la rentrée atmosphérique du satellite Hubble.