Spécialité : correction du devoir sur feuille n° 3

Exercice I

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=\dfrac{8x+4}{x^2+2}$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+2>0$ donc le dénominateur ne s'annule pas : f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x)=4\times\dfrac{2x+1}{x^2+2}$. $f=4\times\dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases}u(x)=2x+1\\ v(x)=x^2+2\end{cases}$.

   $f'=4\times\left(\dfrac{u}{v}\right)'=4\times\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases}u'(x)=2\\ v'(x)=2x\end{cases}$.

   $f'(x)=4\times\dfrac{2\left(x^2+2\right)-2x\times(2x+1)}{\left(x^2+2\right)^2}$

   $=4\times\dfrac{2x^2+4-4x^2-2x}{\left(x^2+2\right)^2}=4\times\dfrac{-2x^2-2x+4}{\left(x^2+2\right)^2}$

   $=\boxed{\dfrac{8\left(-x^2-x+2\right)}{\left(x^2+2\right)^2}}$.

3. Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $x^2+2>0$ et $8\neq 0$ donc
   $f'(x)=0\Leftrightarrow -x^2-x+2=0$.

   - 1 est une racine évidente; le produit des racines vaut -2 donc l'autre solution est -2.
     $f'(x)=0$ pour $x=-2$ ou $x=1$.
     (On peut aussi calculer le discriminant!)
   - $f'(x)$ est du signe de $-x^2-x+2$, donc négatif à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et positif entre les racines.
   - **Tableau de variation :**

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	4	$\searrow$	0

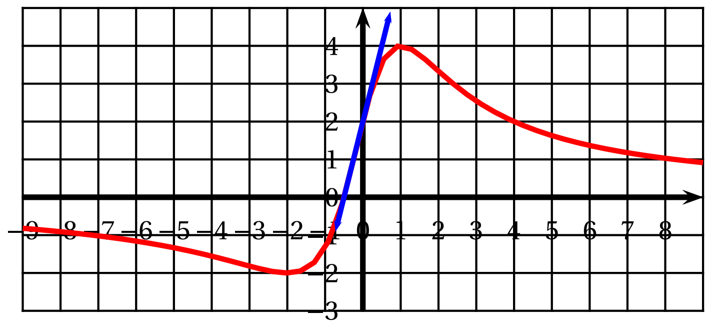
4. Les limites sont placées dans le tableau

5. Équation de la tangente en 0 :
   Cette équation est $y=f'(0)(x-0)+f(0)$
   $\Leftrightarrow\ \boxed{y=4x+2}$

6. D'après le tableau de variation, on a :

   $\boxed{-2\leqslant f(x)\leqslant 4}$ pour tout $x\in\mathbb{R}$.

7. **Courbe :**



Exercice II

Soit l'arc de parabole représentée par la fonction f définie sur [-3 ; 3] par :

$$f(x)=-\frac{4}{9}\left(x^2-9\right)$$

On repère sur cette parabole le point A d'abscisse positive x. À partir du point A, on forme le rectangle hachuré comme indiqué sur la figure.
Le but est de déterminer l'abscisse x pour que l'aire du rectangle soit maximale.

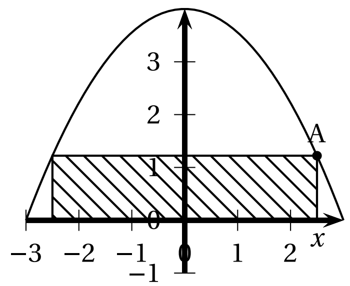
1. L'abscisse de A varie sur $I=[0\ ;\ 3]$.

2. - Un côté du rectangle mesure $2x$.
   - L'autre côté mesure $f(x)=-\dfrac{4}{9}\left(x^2-9\right)$.
   - L'aire du rectangle vaut alors :
     $S(x)=2xf(x)=-\dfrac{8}{9}\left(x^3-9x\right)$

3. $S'(x)=-\dfrac{8}{9}\left(3x^2-9\right)=-\dfrac{8}{9}\times 3\left(x^2-3\right)$
   $=\boxed{-\dfrac{8}{3}\left(x+\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right)}$.

4. $S'(x)$ s'annule de manière évidente en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$ et est du signe opposé à celui de x^2-3 sur I, donc négatif en dehors de l'intervalle formé par les racines et positif entre les racines, avec $x\in[0\ ;\ 3]$
   Tableau de variation :

x	0		$\sqrt{3}$		3
$S'(x)$		$+$	0	$-$	
$S(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$	$\searrow$	0



L'aire de ce rectangle est maximum pour $\boxed{x=\sqrt{3}}$ et vaut alors $\dfrac{16\sqrt{3}}{3}$ u.a..

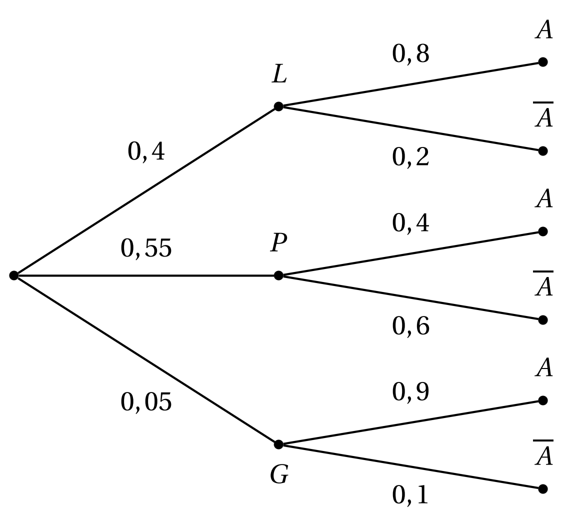
Exercice III

Lors d'une enquête réalisée auprès de familles d'une région, concernant leur habitation principale, on apprend que 55 % des familles interrogées sont propriétaires de leur logement, 40 % en sont locataires et enfin 5 % occupent leur logement gratuitement (ces familles seront appelées dans la suite de l'exercice « occupants à titre gratuit »).
Toutes les familles interrogées habitent soit une maison individuelle, soit un appartement; toute habitation ne contient qu'une seule famille.
60 % des propriétaires habitent une maison individuelle, 80 % des locataires habitent un appartement et enfin 10 % des occupants à titre gratuit habitent une maison individuelle.
On interroge au hasard une famille de la région et on note :

- A l'événement : « la famille habite un appartement »,
- L l'événement : « la famille est locataire »,
- P l'événement : « la famille est propriétaire »,
- G l'événement : « la famille occupe à titre gratuit ».

Les probabilités seront données sous forme décimale, arrondies au millième.

1) (a)



(b)
- $p_P\left(\overline{A}\right)=0,6$
- $p_L(A)=0,8$
- $p_G(A)$=0,9.

2) La probabilité de l'événement : « la famille est propriétaire et habite un appartement » est :
$p(P\cap A)=p_P(A)\times p(P)=0,4\times 0,55=\boxed{0,22}$.

3) On applique la formule des probabilités totales :
$p(A)=0,8\times 0,4+0,4\times 0,55+0,9\times 0,05=0,32+0,22+0,045=\boxed{0,585}$

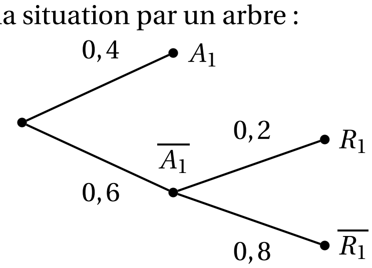
4) $p_A(P)=\dfrac{p(A\cap P)}{p(P)}=\dfrac{0,22}{0,585}=\dfrac{220}{585}=\dfrac{44}{117}\approx\boxed{0,376}$

Exercice IV

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4.
Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

a) On note :
- A_1 l'événement « La personne est absente lors du premier appel »;
- R_1 l'événement « La personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».

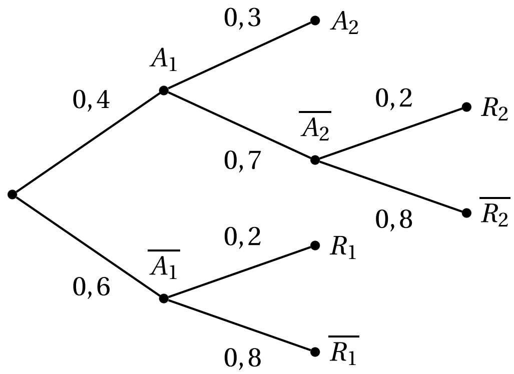
Résumons la situation par un arbre :



$p\left(R_1\right)=p\left(R_1\cap\overline{A_1}\right)=p_{\overline{A_1}}\left(R_1\right)\times p\left(\overline{A_1}\right)=0,2\times 0,6$
$=\boxed{0,12}$

b) Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente et alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.
Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
On note :
- A_2 l'événement « La personne est absente lors du second appel »;
- R_2 l'événement « La personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel;
- R l'événement « La personne accepte de répondre au questionnaire ».

Arbre correspondant :



$p(R) = p(R_1) + p(R_2) = 0,12 + 0,2 \times 0,7 \times 0,4$
$= 0,12 + 0,056 = \boxed{0,176}$

c) $p_R(R_1) = \dfrac{0,12}{0,176} \approx \boxed{0,68}$.

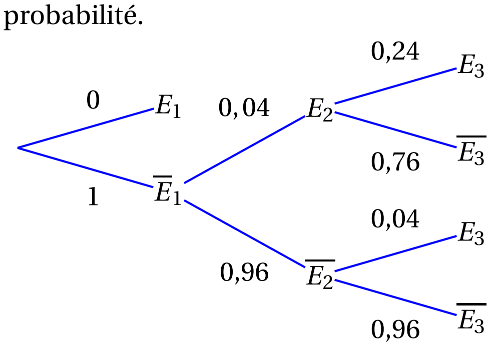
Exercice V

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.



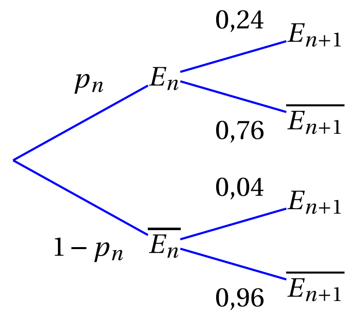
On applique la formule des probabilités totales :

$E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$ (union d'événements disjoints)
$p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = \boxed{0,048}$.

(b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$\mathrm{P}_{E_3}(E_2) = \frac{\mathrm{P}(E_2 \cap E_3)}{\mathrm{P}(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \frac{1}{5} = \boxed{0,2}$$

2. (a) Complétons l'arbre



(b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1}$
$p_{n+1} = 0,24 p_n + 0,04(1-p_n)$
$= (0,24 - 0,04) p_n + 0,04 = \boxed{0,2 p_n + 0,04}$

(c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05$
$= 0,2 p_n + 0,04 - 0,05$
$= 0,2 p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = 0,2 u_n$ donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $r = 0,2$.

Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:
$u_n = u_1 \times r^{n-1} = \boxed{-0,05 \times 0,2^{n-1}}$
et donc : $\boxed{p_n = u_n + 0,05 = 0,05(1 - 0,2^{n-1})}$.

(d) Limite de la suite (p_n).
Comme $|0,2| < 1$ alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = 0,05$.

(e) Le nombre J qui est affiché en sortie d'algorithme est le rang du premier terme de la suite (p_n) qui s'approche de la limite 0,05 à 10^{-K} près, où K est un entier fixé au départ.

La convergence de l'algorithme est assurée par l'existence de la limite vue en (d)