Spécialité : correction du devoir sur feuille n° 1

I

(u_n) est une suite arithmétique de raison r.
On sait que $u_6 = 4$ et $u_8 = 12$.
On sait que pour tout n et tou p, $u_n = u_p + (n-p)r$ donc $u_8 = u_6 + (8-6)r$ qui donne $12 = 4 + 2r$.
On en déduit $2r = 12 - 4 = 8$ d'où $\boxed{r = 4}$.
On en déduit $u_5 = u_6 - r = 4 - 4 = 0$; $\boxed{u_5 = 0}$

II

(u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $r = 5$.
On sait que $S_n = u_0 + u_1 / \cdots + u_n = \dfrac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$.
$u_{10} = u_0 + 10r = 2 + 10 \times 5 = 52$.
Alors : $S = \dfrac{11 \times (2+52)}{2} = \dfrac{11 \times 54}{2} = 11 \times 27 = 297$; $\boxed{S = 297}$.

III

(u_n) est une suite géométrique telle que $u_4 = 6$ et $u_6 = 54$.
On sait que, pour n et p quelconques, $\boxed{u_n = u_p \times q^{n-p}}$.
On en déduit que : $u_6 = u_4 \times q^2$ donc $q^2 = \dfrac{u_6}{u_4} = \dfrac{54}{6} = 9$.
On en déduit $\boxed{q = -3}$ ou $\boxed{q = 3}$ (deux raisons possibles)

IV

Résoudre (soigneusement) :

a) $\dfrac{7x^2 - 3x - 34}{x-1} = 0$.
L'ensemble de définition est $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{1\}}$.
Pour $x \in \mathscr{D}$, $\dfrac{7x^2 - 3x - 34}{x-1} = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 3x - 34 = 0$.
On a une équation du second degré :
$\Delta = (-3)^2 - 4 \times 7 \times (-34) = 9 + 952 = 961 > 0$.
Il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-(-3) - \sqrt{961}}{2 \times 7} = \dfrac{3 - 31}{14} = -2 \in \mathscr{D}$ et
$x_2 = \dfrac{-(-3) + \sqrt{961}}{2 \times 7} = \dfrac{3 + 31}{14} = \dfrac{17}{7} \in \mathscr{D}$.
L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-2\,;\,\dfrac{17}{7}\right)}$.

b) $-\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+3} = 2$.
Les valeurs interdites sont -3 et 0, donc l'ensemble de définition est $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\,;\,0\}}$.
Pour $x \in \mathscr{D}$,
$-\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+3} = 2$
$\Leftrightarrow -\dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x+3} - 2 = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{-(x+3) + 2x - 2x(x+3)}{x(x+3)} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{-x - 3 + 2x - 2x^2 - 6x}{x(x+3)} = 0$
$\Leftrightarrow \dfrac{-2x^2 - 5x - 3}{x(x+3)} = 0$
$\Leftrightarrow -2x^2 - 5x - 3 = 0$.
$\Delta = (-5)^2 - 4 \times (-2) \times (-3) = 25 - 24 = 1 > 0$.
Il y a deux solutions :
$x_1 = \dfrac{-(-5) - \sqrt{1}}{2 \times (-2)} = -1 \in \mathscr{D}$; $x_2 = \dfrac{-(-5) + \sqrt{1}}{2 \times (-2)} = -\dfrac{3}{2} \in \mathscr{D}$
L'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{-\dfrac{3}{2}\,;\,-1\right)}$.

c) Résoudre $\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x+2} \leqslant 0$.

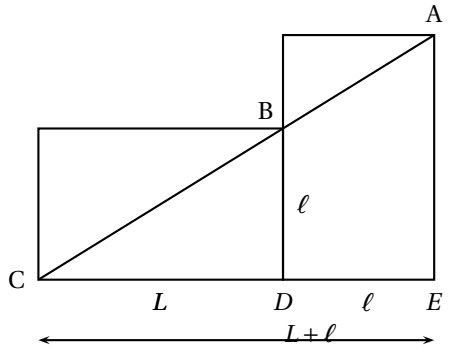
- L'ensemble de définition est $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-2\}}$.
- signe du numérateur :
  $\Delta = (-5)^2 - 4 \times 2 \times (-3) = 49 > 0$.
  Nous avons deux racines :
  $x_1 = \dfrac{5 - \sqrt{49}}{4} = -\dfrac{1}{2}$; $x_2 = \dfrac{5 + \sqrt{49}}{4} = 3$.
  $2x^2 - 5x - 3$ est un trinôme du second degré, du signe du coefficient de x^2 donc positif, à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.
- Signe de $x + 2$: $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$
- **Tableau de signe** :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		3		$+\infty$
Signe de $2x^2 - 5x - 3$		$+$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	
Signe de $x + 2$		$-$	‖	$+$		$+$		$+$	
Signe de $\dfrac{2x^2 - 5x - 3}{x+2}$		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	

- Conclusion : on voulait que l'expression fût négative : l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} =]-\infty\,;\,-2[\cup \left[-\dfrac{1}{2}\,;\,3\right]}$

V

Ingrid s'amuse avec deux cartes de visite de mêmes dimensions. Elle les positionne comme ci-desous. et remarque l'alignement des trois points A, B et C.
Notons L la longueur et ℓ la largeur de cette carte.



Si les points sont alignés, les coefficients directeurs des droites (CB) et (CA) sont égaux. (On peut aussi utiliser le théorème de Thalès dans les deux triangles BCD et ACE qui ont des côtés parallèles ou calculer la tangente de l'angle $\widehat{BCD}$ de deux façons différentes, en utilisant des deux triangles rectangles BCD et ACE)

. Alors : $\dfrac{\ell}{L} = \dfrac{L}{L+\ell}$.

On en déduit : $\ell(L+\ell) = L^2 \Leftrightarrow L^2 - \ell L - \ell^2 = 0$.

En divisant tout par ℓ^2 : $\dfrac{L^2}{\ell^2} - \dfrac{L}{\ell} - 1 = 0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{L}{\ell}\right)^2 - \dfrac{L}{\ell} - 1 = 0$.

$\dfrac{L}{\ell}$ est donc la solution positive de l'équation $x^2 - x - 1 = 0$.

Cette solution est $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).

D'où : $\boxed{\dfrac{L}{\ell} = \varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$.

VI

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables.
   $\mathscr{C}$ admet une tangente horizontale aux points dont l'abscisse est solution de l'équation $f'(x) = 0$.
   On voit que $f(x) = x - 2 + \dfrac{1}{x}$ donc
   $\boxed{f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2-1}{x^2} = \dfrac{(x-1)(x+1)}{x^2}}$.
   $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{-1\,;\,1\}$.
   Les abscisses des points de la courbe $\mathscr{C}$ où la tangente est horizontale sont -1 et 1.
2. $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x^2}$ donc $f'(x) = 2 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{x^2} = 2 \Leftrightarrow -1 = \dfrac{1}{x^2}$, ce qui est impossible car $\dfrac{1}{x^2} > 0$.
   La courbe n'admet aucune tangente de coefficient directeur égal à 2.
3. La droite d'équation $y = -3x + 3$ a pour coefficient directeur -3.
   Deux droites (sécantes à l'axe des ordonnées) sont parallèles si, et seulement si, elles ont le même coefficient directeur.
   On doit résoudre l'équation $f'(x) = -3$ donc
   $1 - \dfrac{1}{x^2} = -3$ d'où $\dfrac{1}{x^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{1}{4}$.
   Il y a deux solutions : $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.
   Les abscisses des points de $\mathscr{C}$ où la tangente est parallèle à la droite d' équation $y = -3x + 3$ sont $-\dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{1}{2}$.

VII

Notons x une des dimensions du rectangle. L'autre dimension est y. (Remarque : inutiles d'introduire quatre lettres L, ℓ, x et y !)
Le périmètre est 40 donc $2x + 2y = 40$ d'où $y = 20 - x$.
L'aire vaut alors $\mathscr{A}(x) = xy = x(20-x) = -x^2 + 20x$.
Remarque : ne pas confondre aire et air (celui qu'on respire !)
$\mathscr{A}'(x) = -2x + 20$; $\mathscr{A}'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 10$.
$\mathscr{A}'(x) > 0$ pour $x < 10$ et $\mathscr{A}'(x) < 0$ pour $x > 10$. La fonction $\mathscr{A}$ est **croissante** puis **décroissante** donc le maximum de $\mathscr{A}$ est atteint pour $x = 10$.
On a alors $x = y$ donc le rectangle de périmètre 40 dont l'aire est la plus grande est le **carré de côté 10**.

VIII Légende de l'échiquier

Selon une légende, un roi demanda à l'homme qui a créé le jeu d'échecs : « Que voulez-vous comme récompense pour votre invention ? » L'homme réfléchit un instant, puis répondit : « Mon roi, donnez-moi un grain de blé sur la première case, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième case, huit sur la quatrième et ainsi de suite jusqu'à ce que toutes les cases du jeu soient remplies. ».

1. Il s'agit de calculer la somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.
   Le nombre de de gains est $N = \dfrac{2^{64}-1}{2-1}$
   $= \boxed{2^{64} - 1 \approx 1{,}845 \times 10^{19}}$.
2. La masse en grammes de ce total de grains de blés serait $\dfrac{N}{1000} \times 43 \approx 7{,}932 \times 10^{17}$, donc $\boxed{7{,}932 \times 10^{14}\ \text{kg}}$
3. La masse des grains de blé sur l'échiquier serait $\dfrac{7{,}932 \times 10^{14}}{10^9} \approx \boxed{793\,210}$ millions de tonnes.
   $\dfrac{793\,210}{770{,}5} \approx \boxed{1\,029}$.
   Cette masse de grains de blé serait plus de 1 029 fois la production mondiale de blé de 2020 !
   On en conclut que c'est une légende.
4. Le volume occupé serait
   $N \times 20 \approx 3{,}689 \times 10^{20}\ \text{mm}^3$.
   $1\text{m} = 10^3$ mm donc $1\ \text{m}^3 = (1\ \text{m})^3 = \left(10^3\ \text{mm}\right)^3 = 10^9\ \text{mm}^3$.
   Le volume occupé serait donc $\boxed{3{,}689 \times 10^{11}\ \text{m}^3}$.
5. L'aire de la base du silo serait $100^2\ \text{m}^2$ donc la hauteur du silo serait :
   $h = \dfrac{3{,}689 \times 10^{11}}{10^4} \approx 36\,893\,488$ m donc $\boxed{36\,893\ \text{km}}$!
   (presque le périmètre de laTerre)