

Exercices de bac sur la fonction ln

I Liban mai 2019

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par :

$$f(x) = x(1 - \ln x)^2.$$

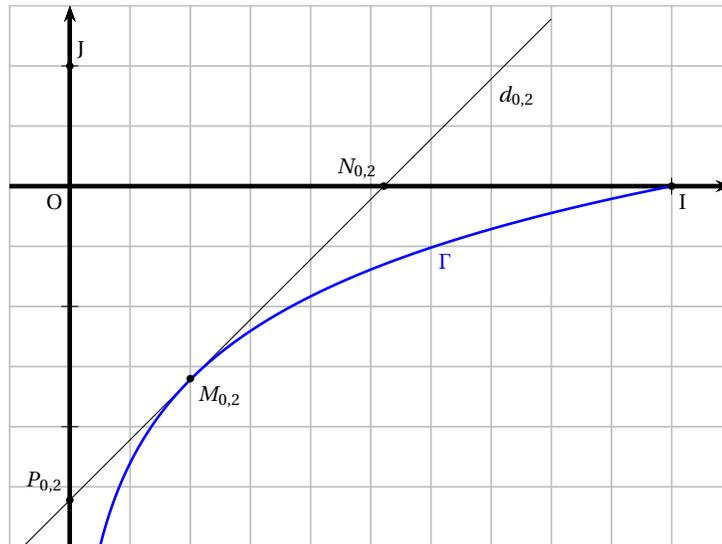
- Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0; 1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.
- Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0; 1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $g(x) = \ln x$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0; 1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a . Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .

On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0; 1]$.

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



- Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.
- Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.
- Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0; 1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2} a(1 - \ln a)^2$.

2. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

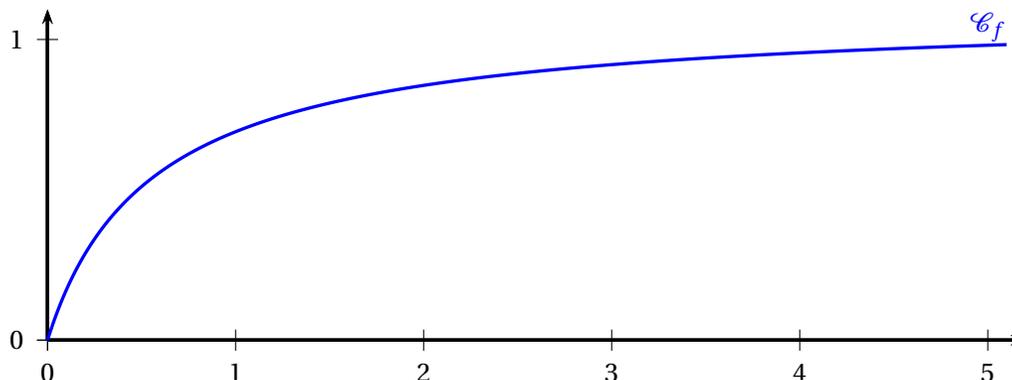
II Nouvelle Calédonie novembre 2019

On considère la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On note \mathcal{C}_f la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

- Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
- (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

- En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$$u_0 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

- Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$.
- Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n) . On admet que $f(\ell) = \ell$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ .

On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0 ; +\infty[$ où

$x_0 = \frac{-2 + \sqrt{7}}{3} \approx 0,215$ et $g(x_0) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3} .

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de la fonction g	0	$g(x_0)$	$-\infty$

- Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α .
-

- Recopier et compléter l'algorithme ci-dessous afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

```

x ← 0,22
Tant que ..... faire
    x ← x + 0,01
Fin de Tant que
    
```

- Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.
- En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n) .