Dérivation locale

Table des matières

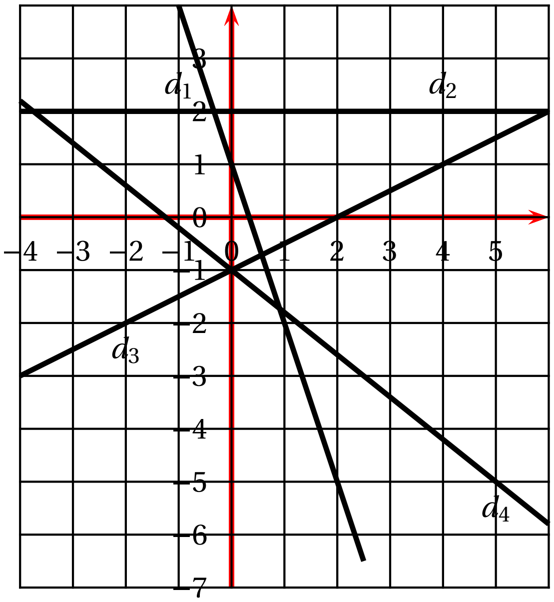
Activité préliminaire page 111

1. f est affine avec $f(2)=3$ et $f(4)=-1$.
   $f(x)=mx+p$.
   $m=\dfrac{f(4)-f(2)}{4-2}=\dfrac{-1-3}{2}=-2$.
   $f(x)=-2x+p$; $f(2)=2 \Leftrightarrow -2\times 2+p=3$ donc $p=7$.
   $\boxed{f(x)=-2x+7}$.

2. (a) $\mathscr{D}_1$ passe par $A(5\,;\,2)$ et $B(-3\,;\,1)$; le coefficient directeur est $m_1=\dfrac{1-2}{-3-5}=\dfrac{1}{8}$. $\boxed{m_1\dfrac{1}{8}}$.

   (b) $\mathscr{D}_2$ passe par $A\left(\dfrac{1}{2}\,;\,\dfrac{3}{4}\right)$ et $B\left(-1\,;\,\dfrac{1}{2}\right)$; le coefficient directeur est $m_2=\dfrac{\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{-1-\frac{1}{2}}=\dfrac{-\frac{1}{4}}{-\frac{3}{2}}=\dfrac{1}{6}$; $\boxed{m_2=\dfrac{1}{6}}$.

   (c) $\mathscr{D}_3$ passe par $A\left(-\sqrt{7}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$ et $B\left(1+\sqrt{3}\,;\,\dfrac{1}{3}\right)$; le coefficient directeur est $m_3=0$ puisque les deux points ont la même ordonnées, donc $\mathscr{D}_3$ est parallèle à l'axe des abscisses.

3. 

- d_1 a pour équation $y = -3x + 1$
- d_2 a pour équation $y = 2$
- d_3 a pour équation $y = \frac{1}{2}x - 2$
- d_4 a pour équation $y = -\frac{4}{5}x - 1$

4. Soit h un réel.

   (a) Si $f(x) = 2x^2 - 5x + 1$, $f(1+h) = 2(1+h)^2 - 5(1+h) + 1 = 2\left(1 + h + h^2\right) - 5 - 5h + 1 = \boxed{2h^2 - 3h - 3}$

   (b) Si $f(x) = \dfrac{x-1}{x+2}$, $\boxed{f(1+h) = \dfrac{h}{3+h}}$

   (c) Si $f(x) = \sqrt{5x-2}$, $\boxed{f(1+h) = 3 + 5h}$

   (d) Si $f(x) = \dfrac{3}{5x^2+1}$, $\boxed{f(1+h) = \dfrac{3}{6 + 10h = 5h^2}}$

7. Le coefficient directeur de la droite (AB) est $\dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2-3}{2-1} = \boxed{-1}$

Situation 1 page 112

Le coup de fabrication est $C(x) = 100\sqrt{x} + 500$.

1. (a) $\boxed{C(0) = 500}$ et $\boxed{C(400) = 2\,500}$.

   (b) Le taux de variation du cout de fabrication entre 0 et 400 pièces fabriquées est :

   $$\frac{C(400) - C(0)}{400 - 0} = \frac{2000}{400} = \boxed{5}$$

   (c) $\dfrac{C(900) - C(400)}{900 - 400} = \dfrac{3\,500 - 2\,500}{500} = \boxed{2}$.

2. On définit le coût marginal C_m par $C_m(x) = C(x+1) - C(x)$.

   (a) $C_m(200) = C(201) - C(200) = \boxed{100\left(\sqrt{201} - \sqrt{200}\right) \approx 3,53}$

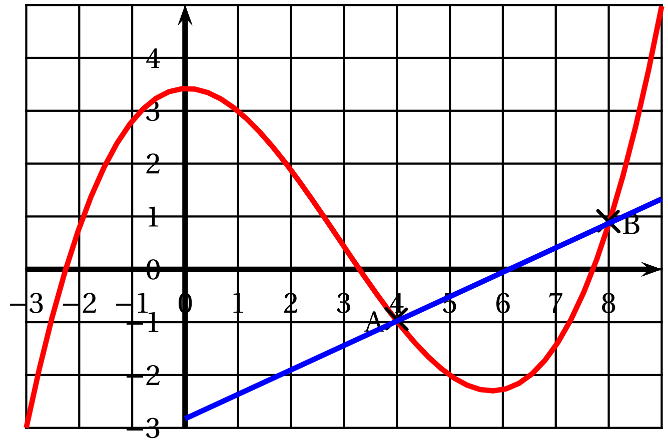
   (b) $C_m(800) = C(801) - C(800) = \boxed{100\left(\sqrt{801} - \sqrt{500}\right) \approx 1,77}$

   (c) $\boxed{C_m(200) \approx 2C_m(800)}$.

I Taux de variation

Définition

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et deux nombres a et b distincts appartenant à I.
On appelle taux de variation de f entre a et b le nombre $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
Graphiquement, cela correspond sur la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de f à la pente ou au coefficient directeur de la droite sécante (AB).



Exemple :
Soit la fonction cube $f : x \mapsto x^3$.
Le taux de variation entre 1 et 3 est $\dfrac{f(3)-f(1)}{3-1} = \dfrac{27-1}{2} = 13$.

Remarque : en physique, on utilise souvent la notation $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ qu'il faut comprendre comme $\dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des bascisses}}$.

Propriété

Pour une fonction affine $f : x \mapsto mx+p$, le taux de variation de f entre deux nombres distincts est m (coefficient directeur).

Propriétés

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et a et b deux nombres réels distincts appartenant à I.

- Si f est croissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et b est positif.
- Si f est décroissante sur I, alors le taux de variation de f entre a et Bb est négatif.

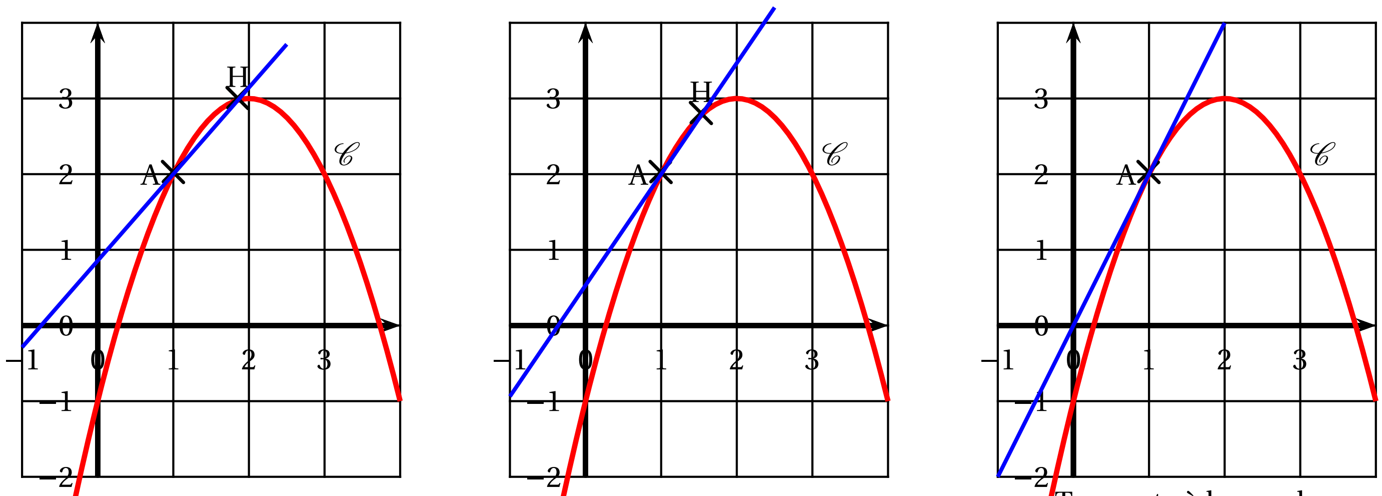
Démonstration : Soient $a<b$ avec $a \in I$ et $b \in I$. Si f est croissante sur I, $f(a) \leqslant f(b)$ donc la taux de variation $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a} \geqslant 0$ (quotient de nombres positifs).
Si f est décroissante, $f(a) \geqslant f(b)$ donc $f(b)-f(a) \leqslant 0$ et le taux de variation est négatif.

Remarque : les réciproques sont fausses.
Par exemple : considérons la fonction carré $x : x \mapsto x^2$ sur $\mathbb{R}$.
Le taux de variation entre -1 et 2 est $\dfrac{f(2)-f(-1)}{2-(-1)} = \dfrac{4-1}{3} = 1 > 0$ mais la fonction f n'est pas croissante sur l'intervalle $[-1\ ;\ 2]$.

II Nombre dérivé d'une fonction en un point

II.1 Tangente à une courbe

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, a un nombre appartenant à I et h un nombre réel non nul tel que $a+h$ appartient à I.
Soit A le point de la courbe représentative de f d'abscisse $a$et H le point de la courbe représentative de f d'abscisse $a+h$.
Lorsque h tend vers 0, le point H se rapproche de A et la sécante (AH) de coefficient directeur $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ se rapproche d'une « droite limite ».



Tangente à la courbe en A

Définition

Si le quotient $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite qui est un nombre réel quand h tend vers 0, on appelle $f'(a)$ ce nombre limite qu'on appelle nombre dérivé de f en a.
On dit que f est dérivable en a. On écrit $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.
La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse a est la droite qui passé par $A(a\ ;\ f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$.

Exemple : soit $f : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Soit $a=3$.
$\dfrac{f(a+h-f(a)}{h}=\dfrac{(3+h)^2-3^2}{h}=\dfrac{9+6h+h^2-9}{h}=\dfrac{6h+h^2}{h}=\dfrac{h(6+h)}{h}=6+h$.
Lorsque h tend vers 0, $6+h$ tend vers 6.
f est dérivable en 3 et $f'(3)=6$.

Remarque : il existe des fonctions n'admettant pas de nombre dérivé.
Exemple : soit f la fonction valeur absolue $x : x \mapsto |x|$.

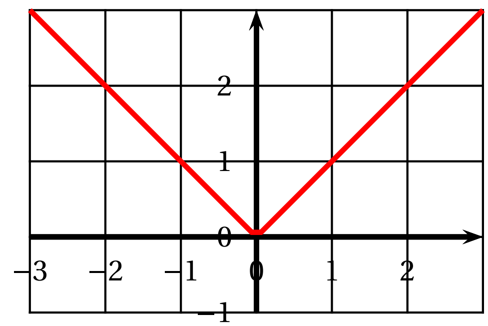
Rappel : $|x| = \begin{cases} x \text{ si } x \geqslant 0 \\ -x \text{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Étudions si f a un nombre dérivé en 0.

$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{|h|-|0|}{h} = \dfrac{|h|}{h}$.

- Si $h > 0$, $\dfrac{|h|}{h} = \dfrac{h}{h} = 1$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \dfrac{|h|}{h} = -1$.
- Si $h < 0$, $\dfrac{|h|}{h} = \dfrac{-h}{h} = -1$ $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{|h|}{h} = 1$

L'expression n'a donc **pas de limite** en 0, la courbe représentative de f n'a pas de tangente en 0.
Remarque : cette expression a une limite à gauche et une limite à droite, on dit que la courbe admet deux demi-tangentes.



Courbe représentative de $x \mapsto |x|$

II.2 Équation de la tangente

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$.
On suppose que f est dérivable en a, donc que f admet un nombre dérivé $f'(a)$ en a.
Alors l'équation de la tangente en a est $\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

Démonstration : $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente, donc l'équation de cette tangente est de la forme $y = f'(a)x + p$.
Calcul de p : par définition, la tangente passe par le point $A(a\,;\,f(a))$.
Par conséquent : $f(a) = f'(a)a + p$ d'où $p = f(a) - f'(a)a$.
Alors : $y = f'(a)x + f(a) - f'(a)a = f'(a)x - f'(a)a + f(a) = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ et $a = 3$. On a trouvé précédemment $f'(3) = 6$.
L'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 3 est : $y = f'(3)(x-3) + f(3)$ donc $y = 6(x-3) + 9$ d'où $\boxed{y = 6x - 9}$

III Exercices d'application

III.1 Calcul d'un nombre dérivé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 4 + \dfrac{5}{x}$.
Montrons que f est dérivable en 3 et calculons $f'(3)$.

$\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{\left(4+\frac{5}{3+h}\right)-\left(4+\frac{5}{3}\right)}{h} = \dfrac{\frac{5}{3+h}-\frac{5}{3}}{h} = \dfrac{\frac{15-15-5h}{3(3+h)}}{h} = -\dfrac{5h}{3(3+h)} \times \dfrac{1}{h} = -\dfrac{5}{3(3+h)}$.

Lorsque h tend vers 0, $3+h$ tend vers 3, donc $3(3+h)$ tend vers $3 \times 3 = 9$ et le quotient tend vers $-\dfrac{5}{9}$.

f est dérivable en 3 et $\boxed{f'(3) = -\dfrac{5}{9}}$.

III.2 Dérivabilité de la fonction carré

Soit $f : x : x \mapsto x^2$ définie sur $\mathbb{R}$.
Soit a quelconque.
$\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = \dfrac{(a+h)^2-a^2}{h} = \dfrac{a^2+2ah+h^2-a^2}{h} = \dfrac{2ah+h^2}{h} = \dfrac{h(2a+h)}{h} = 2a+h.$
Lorsque h tend vers 0, $2a+h$ tend vers $2a$ donc f est dérivable en a et $f\boxed{'(a)=2a}$.
Remarque : on retrouve $f'(3)=6$.

III.3 Détermination d'une tangente

Soit $f(x) = x^2+5x-3$ définie sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que f est dérivable en 3.
2. En déduire l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en 3.

Réponses :

1. $\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h} = \dfrac{\left[(3+h)^2+5(3+h)-3\right]-\left[3^2+5\times3-3\right]}{h} = \dfrac{9+6h+h^2+15+5h-3-9-15+3}{h}$
$= \dfrac{h^2+11h}{h} = h+11$ qui tend vers 11 lorsque h tend vers 0.
2. L'équation de la tangente en 3 est :
$y = f'(3)x + f(3)$ donc $y = 11(x-3)+21$ d'où $\boxed{y = 11x-12}$

III.4 Montrer que la fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0

Soit $f : x : x \mapsto \sqrt{x}$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$.
$\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h} = \dfrac{\sqrt{h}-\sqrt{0}}{h} = \dfrac{\sqrt{h}}{h} = \dfrac{1}{\sqrt{h}}.$
Lorsque h tend vers 0 (en étant positif), $\sqrt{h}$ tend vers 0 en étant positif, donc $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ tend vers $+\infty$ qui n'est pas un nombre réel.
La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0.

Remarque : la limite du taux de variation en 0 est $+\infty$: la courbe représentative de cette fonction admet une tangente « verticale » en 0 qui est l'axe des ordonnées.