Devoir sur feuille n° 3 (à rendre sur copie double)

« L'essence des mathématiques, c'est la liberté. » [Georg Cantor]

I Démonstrations des formules de croissances comparées pour la fonction exponentielle

1) Partie I

On considère la fonction. f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x)=\mathrm{e}^x-x.$$

1. Calculer l'expression de $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de f (les limites à l'infini ne sont pas demandées).
2. En déduire, que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)>0$.
3. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$.
4. En effectuant le changement de variable $X=-x$, en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x$.

2) Partie II : étude de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\mathrm{e}^x-\dfrac{x^2}{2}$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En déduire le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$ (utiliser la partie I).
3. En déduire que pour tout $x>0$, $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}>\dfrac{x}{2}$.
4. En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$
5. On veut calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x$.
   Pour cela, on pose $X=-x$.
   (a) Exprimer alors x en fonction de $-X$.
   (b) Montrer que $x\mathrm{e}^x=-\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}$.
   (c) Si x tend vers $-\infty$, vers quoi tend X ?
   (d) En déduire que $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=0$

3) Partie III : étude de $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$

1. Montrer que, pour tout $x>0$ et pour tout entier $n>0$:
$$\frac{\mathrm{e}^x}{x^n}=\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}}\right)^n\left(\frac{1}{n}\right)^n.$$
2. On pose $X=\dfrac{x}{n}$; on a alors $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}=\left(\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}\right)^n\times\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$.
   On admet le théorème suivant :

> **Théorème**
> « Soient f et g deux fonctions, a, b et c sont des réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.
> Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)=b$ et si $\lim\limits_{x\to b}g(x)=c$, alors
> $\lim\limits_{x\to a}g\left(f(x)\right)=\lim\limits_{x\to a}g\circ f(x)$=c ».

Démontrer alors que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$. On remarquera que $\left(\dfrac{1}{n}\right)^n$ est constant, la variable étant x.

4) Étude de la limite de $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\mathrm{e}^x$ ($n\in\mathbb{N}^*$)

On pose $X=-x$.

1. Montrer que calculer $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\mathrm{e}^x$ revient à calculer $\lim\limits_{X\to=\infty}\dfrac{(-1)^n(X^n)}{\mathrm{e}^X}$.
2. Que vaut $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{X^n}{\mathrm{e}^X}$? Justifier.
3. Conclure

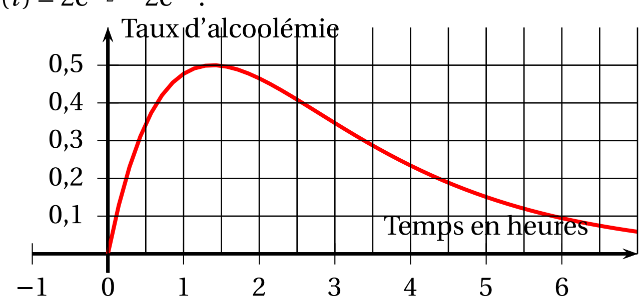
Résumé : on a montré les quatre formules de croissances comparées :

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}=+\infty$	b) $\lim\limits_{x\to-\infty}x\mathrm{e}^x=0$
c) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n}=+\infty$	d) $\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\mathrm{e}^x=0$

Remarque : a) et b) découlent de c) et d)

II

On a étudié révolution du taux d'alcoolémie dans le sang d'un homme majeur de 70 kg pendant les cinq heures suivant l'absorption de deux verres de vin au cours d'un repas.
On suppose que le taux d'alcoolémie (exprimé en grammes d'alcool par litre de sang) est modélisé en fonction du temps écoulé depuis la consommation (exprimé en heures) par la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 7]$ par $f(t)=2\mathrm{e}^{-\frac{t}{2}}-2\mathrm{e}^{-t}$.



1. Déterminer par le calcul au bout de combien de temps, approximativement, le taux d'alcoolémie est maximal.
2. Étudier la convexité de f sur $[0\,;\,7]$.
3. Déterminer au bout de combien de temps, approximativement, la diminution du taux d'alcool dans le sang s'accélère.

III

La loi de refroidissement de Newton stipule que le taux d'évolution de la température d'un corps est proportionnel à la différence entre la température de ce corps et celle du milieu environnant.

Une tasse de café est servie à une température initiale de 80 °C dans un milieu dont la température, exprimée en degré Celsius, supposée constante, est notée M.

Le but de cet exercice est d'étudier le refroidissement du café en appliquant la loi de Newton suivant deux modèles. L'un, dans la partie A, utilise une suite ; l'autre, dans la partie B, utilise une fonction.

Les parties A *et* B *sont indépendantes.*

Partie A

Dans cette partie, pour tout entier naturel n, on note T_n la température du café à l'instant n, avec T_n exprimé en degré Celsius et n en minute. On a ainsi $T_0 = 80$.

On modélise la loi de Newton entre deux minutes consécutives quelconques n et $n+1$ par l'égalité :

$$T_{n+1} - T_n = k\,(T_n - M)$$

où k est une constante réelle.

Dans la suite de la partie A, on choisit $M = 10$ et $k = -0{,}2$.

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a :

$$T_{n+1} - T_n = -0{,}2\,(T_n - 10)\,.$$

1. D'après le contexte, peut-on conjecturer le sens de variations de la suite (T_n) ?
2. Montrer que pour tout entier naturel n : $T_{n+1} = 0{,}8T_n + 2$.
3. On pose, pour tout entier naturel n : $u_n = T_n - 10$.
   (a) Montrer que (u_n) est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme u_0.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $T_n = 70 \times 0{,}8^n + 10$.
   (c) Déterminer la limite de la suite (T_n).
4. On considère l'algorithme suivant :

```
Tant que T ⩾ 40
      T ← 0,8T + 2
      n ← n + 1
Fin Tant que
```

   (a) Au début, on affecte la valeur 80 à la variable T et la valeur 0 à la variable n.
   Quelle valeur numérique contient la variable n à la fin de l'exécution de l'algorithme ?
   (b) Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Partie B

Dans cette partie, pour tout réel t positif ou nul, on note $\theta(t)$ la température du café à l'instant t, avec $\theta(t)$ exprimé en degré Celsius et t en minute. On a ainsi $\theta(0) = 80$.

Dans ce modèle, plus précis que celui de la partie A, on suppose que θ est une fonction dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, la loi de Newton se modélise par l'égalité :

$$\theta'(t) = -0{,}2(\theta(t) - M).$$

1. Dans cette question, on choisit $M = 0$. On cherche alors une fonction θ dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ vérifiant $\theta(0) = 80$ et, pour tout réel t de cet intervalle : $\theta'(t) = -0{,}2\theta(t)$.
   (a) Si θ est une telle fonction, on pose pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) = \dfrac{\theta(t)}{\mathrm{e}^{-0{,}2t}}$.
   Montrer que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et que, pour tout réel t de cet intervalle, $f'(t) = 0$.
   (b) En conservant l'hypothèse du **a.**, calculer $f(0)$.
   En déduire, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, une expression de $f(t)$, puis de $\theta(t)$.
   (c) Vérifier que la fonction θ trouvée en **b.** est solution du problème.
2. Dans cette question, on choisit $M = 10$. On admet qu'il existe une unique fonction g dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$, modélisant la température du café à tout instant positif t, et que, pour tout t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$: $g(t) = 10 + 70\mathrm{e}^{-0{,}2t}$, où t est exprimé en minute et $g(t)$ en degré Celsius.
   Une personne aime boire son café à 40 °C.
   Montrer qu'il existe un unique réel t_0 dans $[0\,;\,+\infty[$ tel que $g(t_0) = 40$.
   Donner la valeur de t_0 arrondie à la seconde.