Fonctions de référence

I Rappels sur les fonctions vues en seconde

I.1 Fonctions affines

Rappel : une fonction f est affine s'il existe deux nombres m et p tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$.
L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
am est le coefficient directeur et b est l'ordonnée à l'origine.
La représentation graphique $\mathscr{C}_f$ est une droite (passant notamment par le point de coordonnées $(0\,;\,b)$).

Propriété

- f est croissante si, et seulement si, $a > 0$
- f est décroissante si, et seulement si, $a < 0$
- f est constante si, et seulement si, $a = 0$

Remarque : si $p = 0$, la droite $\mathscr{C}_f$ passe par l'origine du repère et on dit que f est linéaire.

Tableaux de variation :

$\boxed{\text{Pour } a > 0}$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

$\boxed{\text{Pour } a < 0}$:

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{a}$	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	0	$\searrow$

I.2 Fonction carré

Définition

La fonction carré est la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$, par $f : x \mapsto x^2$.

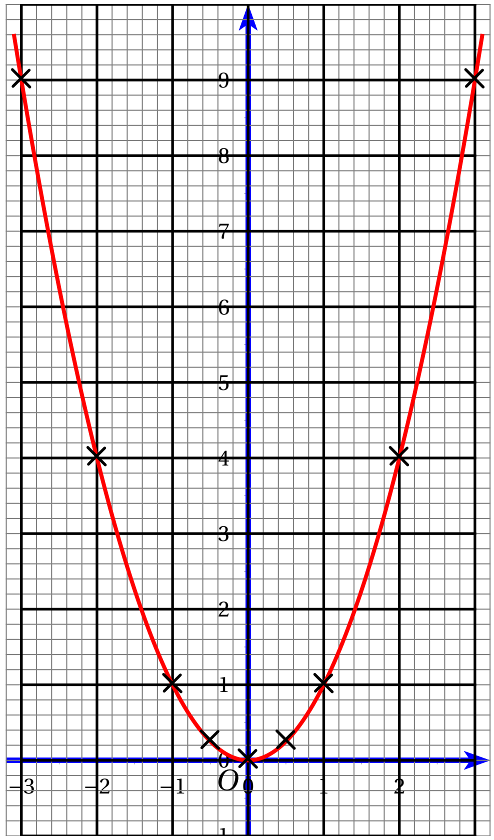
Propriété

La fonction carré est paire, c'est-à-dire qu pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$.
La courbe représentative de f $\mathscr{C}_f$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) = x^2$	$+\infty$ $\searrow$	0	$\nearrow$ pI

Courbe représentative (parabole) :



I.3 Fonction cube

Définition

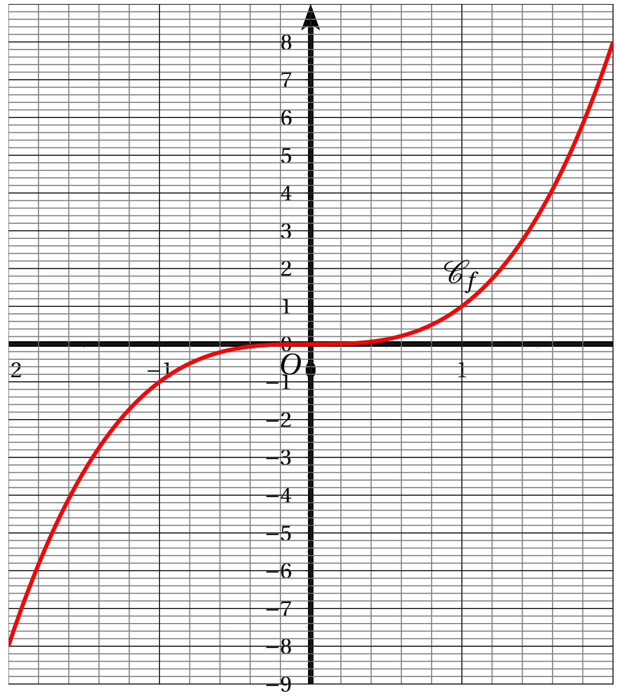
On appelle fonction cube la fonction $f : x \mapsto x^3$

Propriétés

- Cette fonction est définie sur $\mathbb{R}$
- Elle est impaire (f(-x)=-f(x) pour tout x) (donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine O)
- Elle est croissante sur $\mathbb{R}$

Le tableau de variation est

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$



Courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$

I.4 Fonction inverse

Définition

On appelle fonction inverse la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$

Propriété

a) La fonction inverse $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty\,;\,0[\cup]0\,;\,+\infty[$.

b) La fonction inverse $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est impaire, c'est-à-dire $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \neq 0$.
La courbe représentative de f est donc symétrique par rapport à O.

Démonstration

- f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à O.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = \dfrac{1}{-x} = -\dfrac{1}{x} = -f(x)$

Variations

Propriété

$f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0]$ et décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.

⚠ : attention, on ne peut parler de variation que sur un intervalle ; il est faux de dire que f est décroissante sur $\mathbb{R}^*$: par exemple : $-2 < 2$; $f(-2) = -\dfrac{1}{2}$, $f(2) = \dfrac{1}{2}$ donc $f(-2) < (2)$

Démonstration :

- Sur $[0\ ;\ +\infty[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]0\ ;\ +\infty[$ avec $0 < x_1 < x_2$.
  Il s'agit de comparer les nombres $f(x_1) = \dfrac{1}{x_1}$ et $f(x_2) = \dfrac{1}{x_2}$.
  $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres positifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]0\ ;\ +\infty[$.

- Sur $]-\infty\ ;\ 0[$: soient deux réels x_1 et x_2 quelconques de $]-\infty\ ;\ 0[$ avec $\leqslant x_1 < x_2 < 0$.
  On a le même calcul : $f(x_2) - f(x_1) = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_1} = \dfrac{x_1 - x_2}{x_1 x_2}$.
  $x_1 - x_2 < 0$ car $x_1 < x_2$; $x_1 x_2 > 0$ comme produit de nombres négatifs. Les images sont classées dans l'ordre inverse des antécédents, donc f est **décroissante** sur $]-\infty\ ;\ 0[$.

  Remarque : sur $]-\infty\ ;\ 0]$, on aurait pu utiliser la symétrie de la courbe par rapport à O.

Tableau de variation :

0 est une valeur interdite, donc il faut mettre une double-barre en dessous de 0.

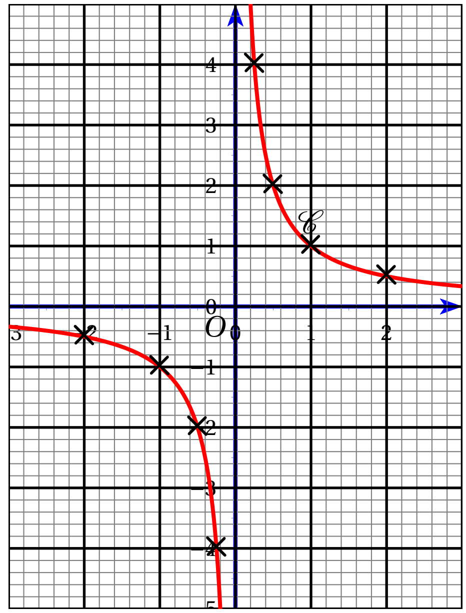
x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0

Courbe représentative

Pour tracer la courbe, on trace la partie correspondant à des abscisses positives en calculant les coordonnées de quelques points.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$f(x)=\frac{1}{x}$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

La courbe représentative de la fonction inverse est appelée **hyperbole**. Elle est constituée de deux branches (**symétriques** par rapport à l'origine O).



I.5 Fonction racine carrée

Définition

On appelle fonction racine carrée la fonction $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Propriétés

- Cette fonction est définie sur $[0\,;\,+\infty[$ (car on ne peut calculer la racine carrée que d'un nombre positif)
- Elle est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

Le tableau de variation est

x	0	$+\infty$
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

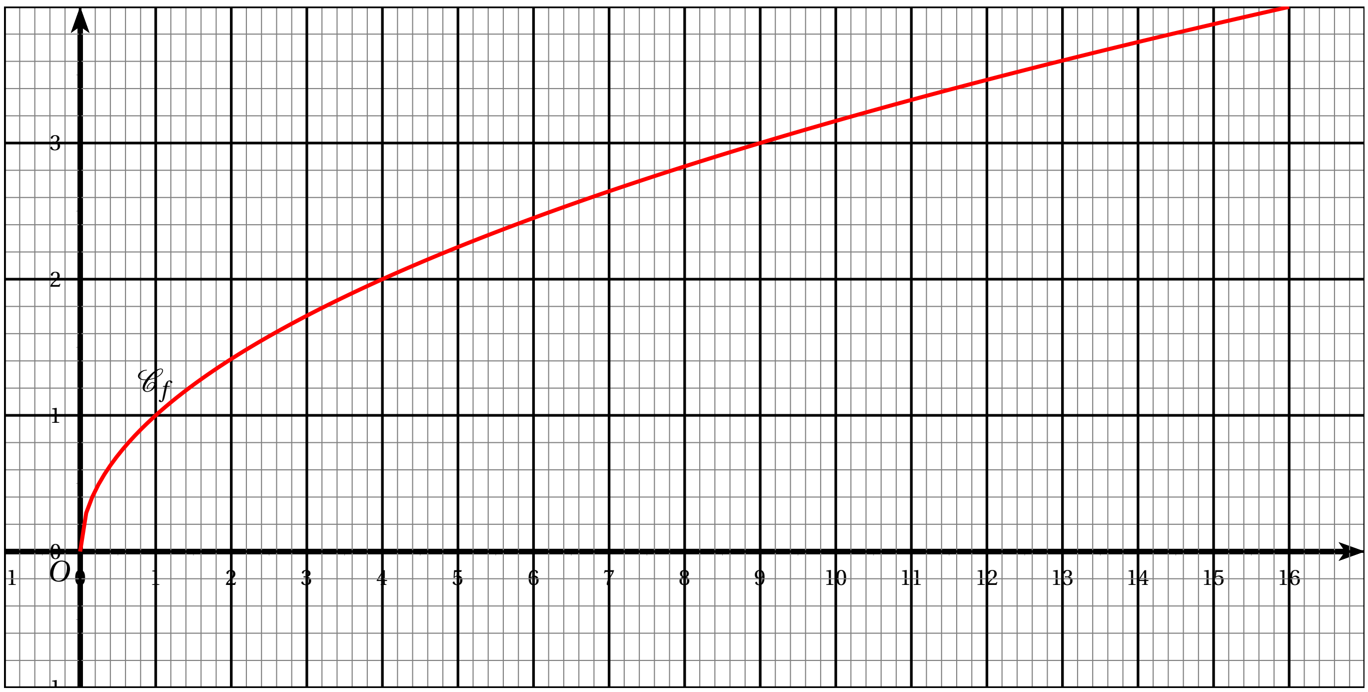
Démonstration de la croissance : Soient deux nombfres x_1 et x_2 quelconques, vérifiant $0 \leqslant x_1 < x_2$ (donc $x_2 - x_1 > 0$)
On doit comparer $f(x_1)$ et $f(x_2)$ en étudiant le signe de la différence $f(x_2) - f(x_1)$.

$$f(x_2) - f(x_1) = \sqrt{x_2} - \sqrt{x_1} = \frac{\left(\sqrt{x_2} - \sqrt{x_1}\right) \times \left(\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}\right)}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{\sqrt{x_2}^2 - \sqrt{x_1}^2}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}} = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}}.$$

Le numérateur est positif car $x_1 < x_2$.
Le dénominateur $\sqrt{x_2} + \sqrt{x_1}$ est positif comme somme de deux nombres positifs.

Par conséquent : $f(x_2) - f(x_1) > 0$ d'où $f(x_1) < f(x_1)$.
f respecte l'ordre donc f est croissante.

Courbe représentative :



I.6 Fonction valeur absolue

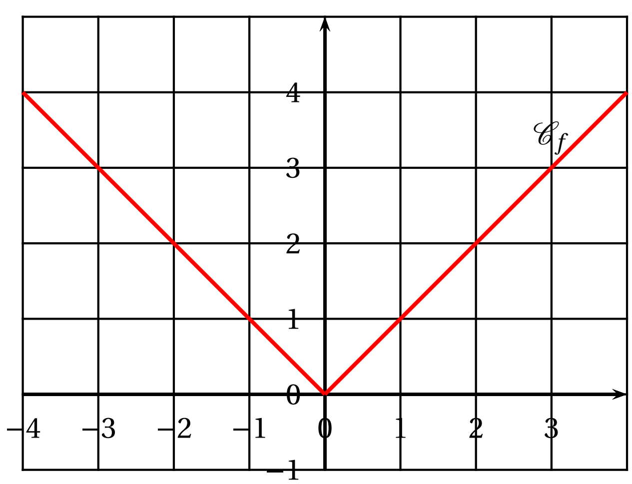
Rappel : Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on appelle valeur absolue de x le nombre noté $|x|$, qui est la distance de x à 0, donc toujours un nombre positif.

Remarque : $|x| = \begin{cases} x \textbf{ si } x \geqslant 0 \\ -x \textbf{ si } x \leqslant 0 \end{cases}$.

Définition

La fonction valeur absolue est la fonction $x : x \mapsto |x|$.

Courbe représentative : elle est constituée de deux demi-droites :



II Fonctions polynômes du second degré

Activités A et B page 46

II.1 Définitions

Définition

On appelle fonction **polynôme du second degré** toute fonction f définie sur $\mathbb{R}$ de la forme

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

où a, b et c sont des réels appelés coefficients avec $a \neq 0$.

Exemples : Exemples de fonctions polynômes du second degré

fonctions polynôme de degré 2	coefficients
$f(x) = 2x^2 - 5x + 3$	$a = 2$, $b = -5$, $c = 3$
$f(x) = -x^2 + 3$	$a = -1$, $b = 0$, $c = 3$
$f(x) = -7x^2 + 3x$	$a = -7$, $b = 3$, $c = 0$

Définition

L'expression $f(x) = ax^2 + bx + c$ peut s'écrire sous la forme $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$ avec $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$ et $\beta = f(\alpha)$.
Cette forme est appelée **forme canonique**

Démonstration :

$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \dfrac{b}{a}x\right) + c = a\left[\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \left(\dfrac{b}{2a}\right)^2\right] + c = a\left(x - \left(-\dfrac{b}{2a}\right)\right)^2 - \dfrac{b^2}{4a} + c = \boxed{a(x-\alpha)^2 + \beta}$ en posant $\alpha = -\dfrac{b}{2a}$; on a alors $\beta = -\dfrac{b^2}{4a} + c = f(\alpha)$, car en remplaçant x par α dans $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on trouve β.

Exemples :

1. Soit $P(x) = 2x^2 - 4x + 5 = ax^2 + bx + c$ avec $a = 2$, $b = -4$ et $c = 5$.
   On a $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{-4}{2 \times 2} = 1$
   $\beta = P(\alpha) = P(1) = 3$
   Par conséquent $P(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta = 2(x-1)^2 + 3$.
2. $P(x) = -5x^2 + 2x - 7 = ax^2 + bx + c$ avec $a = -5$, $b = 2$ et $c = -7$.
   $\alpha = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{2}{2 \times (-5)} = \dfrac{1}{5}$
   $\beta = P(\alpha) = P\left(\dfrac{1}{5}\right) = -5 \times \left(\dfrac{1}{5}\right)^2 + 2 \times \dfrac{1}{5} - 7 = -\dfrac{34}{5}$.
   On en déduit $P(x) = -5\left(x - \dfrac{1}{5}\right)^2 - \dfrac{34}{5}$

II.2 Variations et représentation graphique

Propriété

La fonction polynôme de degré 2 définie sur $\mathbb{R}$ est :

- strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ puis strictement croissante sur $[\alpha\,;\,+\infty[$ **si** $a > 0$,
- strictement croissante sur $]-\infty\,;\,\alpha]$puis strictement décroissante $[\alpha\,;\,+\infty[$ **si** $a < 0$,

Démonstration dans le cas $a > 0$: Sur $[\alpha\,;\,+\infty[$:

On prend deux nombres x_1 et x_2 avec $\alpha \leqslant x_1 \leqslant x_2$.
$\alpha \leqslant x_1 \leqslant x_2 \Rightarrow 0 \leqslant x_1 - \alpha \leqslant x_2 - \alpha \Rightarrow 0 \leqslant (x_1-\alpha)^2 \leqslant (x_2-\alpha)^2$ (car la fonction carré est croisante sur $[0\,;\,+\infty[$)

On en déduit $0 \leqslant 0 \leqslant a\,(x_1-\alpha)^2 \leqslant a\,(x_2-\alpha)^2$ puis $\beta \leqslant a\,(x_1-\alpha)^2 + \beta \leqslant a\,(x_2-\alpha)^2\,\beta$.

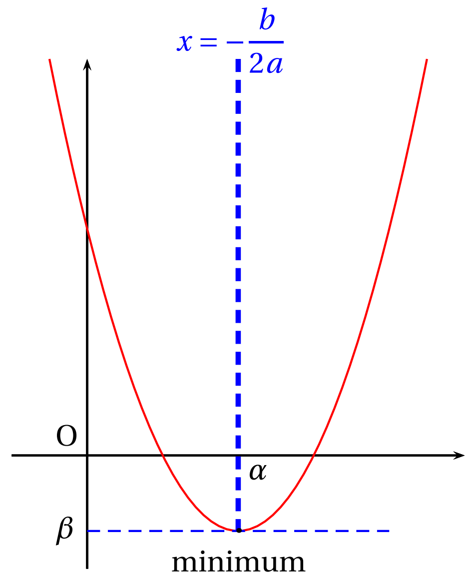
Les images sont classées sdan sel même ordre que les antécédents, donc la fonction f est croissante sur $[\alpha + \infty[$.

Démonstration analogue sur $]-\infty\,;\,\alpha]$ et dans le cas où $a < 0$

Tableau de variations et représentation graphique :

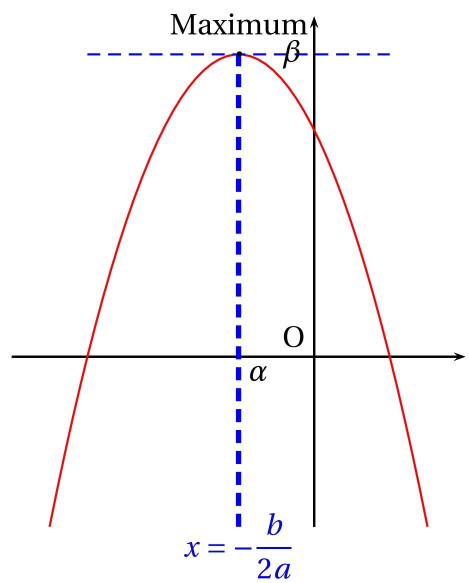
a > 0

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$	β	$\nearrow$ $+\infty$



a < 0

x	$-\infty$	$-\dfrac{b}{2a}$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	β	$\searrow$ $-\infty$



Dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$, la courbe représentative d'une fonction polynôme de degré 2 est une **parabole** Cette parabole admet un **axe de symétrie** parallèle à l'axe des ordonnées.

Remarque : pour calculer $f(x) = a(x-\alpha)^2 + \beta$, on effectue plusieurs transformations successives : $x \mapsto (x-\alpha)^2 \mapsto a(x-\alpha)^2 \mapsto a(x-\alpha)^2 + \beta$.
La première transformation correspond à une translation parallèlement à l'axe des abscisses de α unités; la deuxième, multiplication par a, correspond à une dilatation (et un renversement si $a < 0$) et la troisième à une translation parallèlement à l'axe des ordonnées de β unités.