Suites numériques

Table des matières

I Suites numériques

I.1 Généralités

Définition :

Une suite numérique u est une fonction numérique, définie sur $\mathbb{N}$ ou sur une partie de $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

$u : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{R} \\ n \mapsto u(n) \end{array}$.

Notation : Le terme général $u(n)$ se note u_n.
L'ensemble des termes de la suite se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Attention

Attention à ne pas confondre les deux notations :

- u_n est le terme de rang n.
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est l'ensemble des termes de la suite.

Exemples :

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = 2^n - 1$ pour tout n
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sqrt{n-4}$ pour tout $n \geqslant 4$.

Nous allons voir qu'il y a deux façons de définir une suite :

II.2 Définition explicite

Une suite est définie de façon explicite lorsque le terme général u_n est exprimé en fonction de n.

Exemples :

1. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = n^2 + 5n + 3$.
2. Soit la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n^2 + 5}$.
3. Soit la suite (u_n) définie par : u_n est la n^{e} décimale de π.
   Même si l'on ne connaît pas encore toutes les décimales de π, cette suite est explicite, car les décimales de π sont bien définies.

Quand une suite est définie de faǫn explicite, on peut calculer directement le terme de n'importe quel rang.

III.3 Définition par récurrence :

Une suite (u_n) est définie par récurrence lorsque chaque terme est défini en fonction du terme précédent ou des termes précédents, et par la donnée du ou des premiers termes.

Exemples :

- Soit (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n} \text{ pour tout } n \end{cases}$
- suite de Fibonacci :
  $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = u_n + u_{n+1} \end{cases}$.

- $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3+u_n} \end{cases}$ Calculer les trois premiers termes.
  Est-il facile de calculer le terme u_{25} ? u_{100} ?

Le problème des suites définies par récurrence est que pour calculer le terme de rang p, il faut connaître tous les termes précédents !
Pour certaines suites définies par récurrence, on essaye de se ramener à une définition explicite, mais ce n'est pas toujours facile ou possible !

II Représentation graphique des termes d'une suite

I.1 Suite définie de façon explicite

On a $u_n = f(n)$ où f est une fonction.
On représente les points de coordonnées $(n\ ;\ f(n))$.

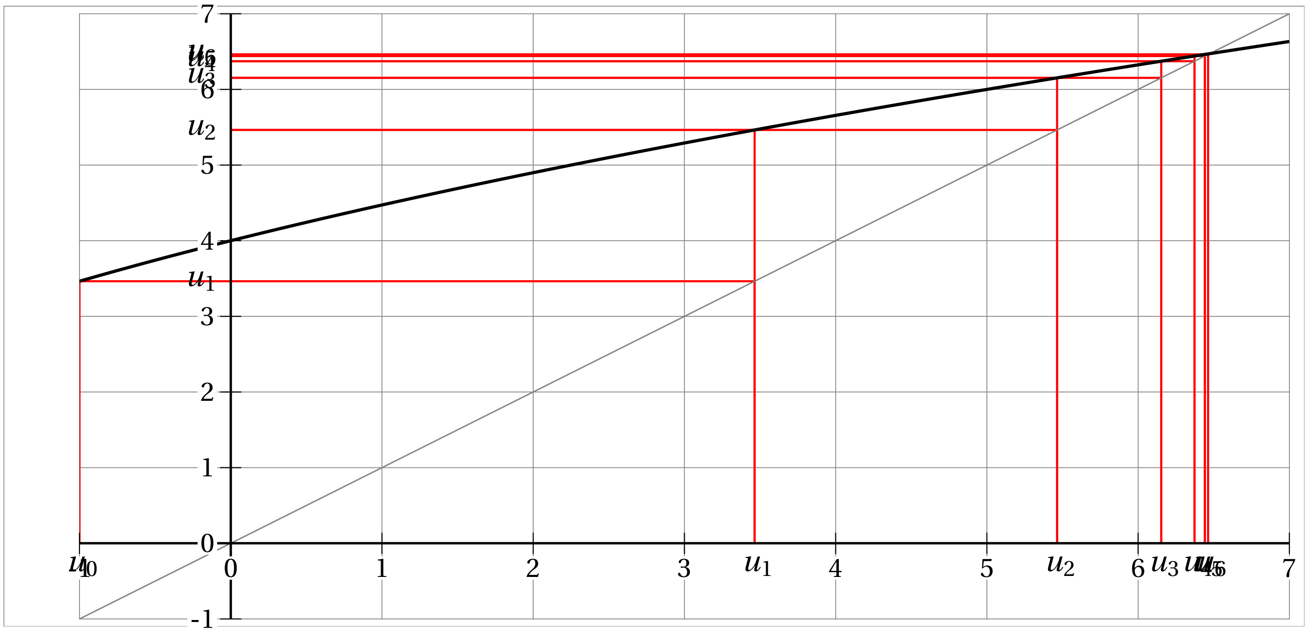
II.2 Suites définies par récurrence

Soit une suite définie par u_0 et la relation $u_{n+1} = f(u_n)$, où f est une fonction.

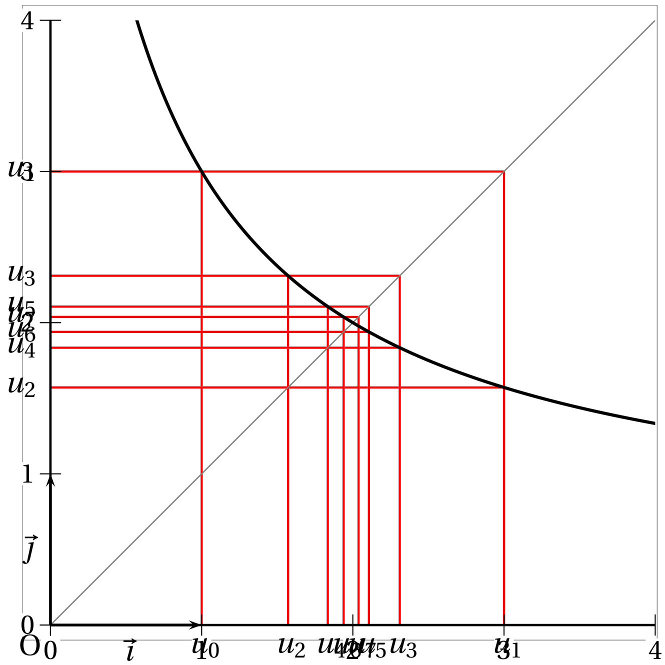
- On trace un repère $\left(O\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$, puis la droite $\mathscr{D}$, d'équation $y = x$ (première bissectrice).
- On trace la représentation graphique de la fonction f dans le même repère.
- On place u_0 sur l'axe des abscisses et le point $M_0(u_0\ ;\ 0)$ sur l'axe des abscisses.
- On veut représenter u_1 ; par définition, $u_1 = f(u_0)$. On trace en pointillés le segment parallèle à l'axe des ordonnées, joignant M_0 au point de la courbr $\mathscr{C}_f$ de même abscisse, puis en pointillés le segment joignant ce point au point de même ordonnée de la droite $\mathscr{D}$. Ces deux points ont pour ordonnée u_1.
  Comme $\mathscr{D}$ a pour équation $y = x$, ce dernier point a pour abscisse u_1, que l'on place sur l'axe des abscisses et on note M_1 le point de coordonnées $(M_1\ ;\ 0)$.
- On recommence la construction précédente avec u_1, puis u_2, etc.

Exemple : Soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n + 4} \end{cases}$

On a $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 2\sqrt{x+4}$.
On représente la courbe $\mathscr{C}_f$ et la droite d'équation $y = x$ (première bissectrice).
Sur l'axe des abscisses, on place $u_0 = -1$.
$u_1 = f(u_0)$; à partir de u_0, on trace la droite parallèle à l'axe des abscisses jusqu'à la courbe $\mathscr{C}_f$. L'ordonnée du point d'intersection est u_1.
On trace alors la droite parallèle à l'axe des abscisses à partir du point d'intersection précédent jusqu'à la bissectrice ; ce point a pour coordonnées $\left(u_1\ ;\ u_1\right)$; on place alors sur l'axe des abscisses le nombre u_1.
On recommence à partir de u_1 …



Autre exemple : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + 8}{2u_n + 1} \end{cases}$



On peut consulter la vidéo suivante : cliquer ici

III Variations et bornes

Définitions

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite.

- **Suite croissante :** (u_n) est croissante si, pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- **Suite décroissante :** (u_n) est décroissante si, pour tout n, $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- **Suite constante :** (u_n) est constante si, pour tout n, $u_{n+1} = u_n$.
- **Suite monotone :** (u_n) est monotone si elle est croissante ou décroissante.
  Elle est strictement monotone si elle est strictement croissante ou strictement décroissante.
- **Suite majorée :** (u_n) est majorée par M s'il existe un réel M, tel que, pour tout n, $u_n \leqslant M$.
  M est alors un majorant de la suite. Il n'est pas unique, puisque tout nombre supérieur à un majorant est aussi un majorant.
- **Suite minorée :** (u_n) est minorée par m s'il existe un réel m, tel que, pour tout n, $u_n \geqslant m$.
  m est alors un minorant de la suite. Il n'est pas unique, puisque tout nombre inférieur à un minorant est aussi un minorant.
- **Suite bornée :** (u_n) est bornée si elle est minorée et majorée

Exemples :

1. Soit u_n la suite définie par : $u_n = 1 - \dfrac{1}{n+1}$. Pour tout n, $u_n < 1$ donc la suite (u_n) est majorée par 1.
   De même, $u_n > 0$ donc (u_n) est minorée par 0.

Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n+2}\right) = \left(1 - \dfrac{1}{n+1}\right) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} > 0$.
Pour tout n, $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc la suite (u_n) est croissante.
Autre méthode : $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x+1}$ $(x \in \mathbb{R})$. Sur $\mathbb{R}$, f est dérivable et $f'(x) = \dfrac{1}{(x+1)^2} > 0$.
La fonction f est strictement croissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $f(n+1) \geqslant f(n)$, c'est-à-dire $u_{n+1} \geqslant u_n$, donc la suite est croissante.

2. Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + n \end{cases}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = n \geqslant 0$ donc (u_n) est croissante.

Nous allons maintenant étudier deux types de suites particulières, que l'on rencontre souvent.

IV Suites arithmétiques

I.1 Définition

Définition

Une suite (u_n) est arithmétique s'il existe un réel r tel que, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + r$.
Par conséquent : $u_{n+1} - u_n = r$; la différence entre deux termes consécutifs est constante.
r est appelé **raison** de la suite.

Exemples :

- la suite des entiers naturels
- la suite des entiers pairs (ou impairs)
- la hauteur dont on s'élève en grimpant un escalier

Remarque : le terme « arithmétique » vient de ce que chaque terme est la moyenne arithmétique du terme qui le précède et de celui qui le suit : $u_n = \dfrac{u_{n-1} + u_{n+1}}{2}$.

II.2 Écriture explicite des termes

Théorème

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on : $u_n = u_0 + nr$.
Plus généralement : pour tout p, $u_n = u_p + (n-p)r$

Démonstration (pas très rigoureuse, tant que l'on n'a pas vu les démonstrations par récurrence) On a successivement :
$u_1 = u_0 + r$
$u_2 = u_1 + r = (u_0 + r) + r = u_0 + 2r$
$u_3 = u_2 + r = (u_0 + 2r) + r = u_0 + 3r$
$\ldots$
$u_{n-1} = u_0 + (n-1)r$
$u_n = u_{n-1} + r = (u_0 + (n-1)r) + r = u_0 + nr$

Sinon, $u_n = u_0 + nr$ et $u_p = u_0 + pr$; par soustraction, on a : $u_n - u_p = (n-p)r$ donc $u_n = u_p + (n-p)r$.

III.3 Variations

Théorème :

Soit (u_n) un suite arithmétique de raison r.

- Si $r = 0$, la suite (u_n) est constante.
- Si $r > 0$, la suite (u_n) est croissante.
- Si $r < 0$, la suite (u_n) est décroissante.

Démonstration :
$u_{n+1} - u_n = r$ d'où le résultat.

IV.4 Somme des premiers entiers naturels

Théorème

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons s_n la somme $s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$.
On a : $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

Démonstration :
On écrit s_n à l'endroit puis à l'envers et on ajoute terme à terme.
$s_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$
$s_n = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1$.
En additionnant, on trouve :
$2s_n = (n+1) + (n+1) + \cdots + (n+1) = n(n+1)$ (car il y a n termes égaux à $n+1$).
Par conséquent : $s_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$.

V.5 Sommes des termes consécutifs d'une suite arithmétique

Théorème :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r et soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Alors : $S_n = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r$

ou $S_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$ (nombre de termes multiplié par la demi-sommes des termes extrêmes).

$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$ (nombre de termes multiplié par la demi-sommes des termes extrêmes).

Démonstration :
$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) = \cdots + (u_0 + (n-1)r) + (u_0 + nr)$
$= (u_0 + u_0 + \cdots u_0) + (1 + 2 + \cdots + n)r = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2}r$

Autre formule :
On écrit là encore S_n de deux façons différentes (à l'endroit puis à l'envers).
$S_n = u_0 + (u_0 + r) + (u_0 + 2r) + \cdots + (u_{n-1} + (n-1)r) + (u_0 + nr)$.
$S_n = u_n + (u_n - r) + (u_n - 2r) + \cdots + (u_n - (n-1)r) + (u_n - nr)$.
On ajoute terme à terme :
$2S_n = (u_0 + u_n) + \cdots + (u_0 + u_n) = (n+1)(u_0 + u_n)$ (car il y a $n+1$ termes dans la somme S_n).
D'où : $S_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

La formule $u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = (n-p+1)\left(\dfrac{u_p + u_n}{2}\right)$ se démontre de la même façon ; le nombre de termes est $n-p+1$.

V Suites géométriques

I.1 Définition

Définition

Une suite (u_n) est géométrique s'il existe un réel q tel que, pour tout n, $u_{n+1} = qu_n$.
q est appelé **raison** de la suite.

Exemples :

- la suite des puissances de 2 : 2^0, 2^1, $\cdots$, $2^n \cdots$ est une suite géométrique de raison $q = 2$
- la population d'une ville augmente chaque année de 1,5 % ; elle est donc multipliée chaque année par le nombre (coefficient multiplicateur) $\left(1 + \dfrac{1,5}{100}\right) = 1,015$. on obtient une suite géométrique de raison $q = 1,015$

Remarque : le terme « géométique » vient de ce que chaque terme est la moyenne géométrique du terme qui le précède et de celui qui le suit : $u_n = \sqrt{u_{n-1} \times u_{n+1}}$.

II.2 Écriture explicite des termes

Théorème

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on : $u_n = u_0 q^n$.
Plus généralement : pour tout p, $u_n = u_p q^{n-p}$

Démonstration (pas très rigoureuse, tant que l'on n'a pas vu les démonstrations par récurrence) On a successivement :
$u_1 = qu_0$
$u_2 = u_1 \times q = \left(u_0 \times q\right) \times q = u_0 q^2$
$u_3 = u_2 \times q = \left(u_0 \times q^2\right) = u_0 \times q^3$
$\ldots$
$u_{n-1} = u_0 \times q^{n-1}$
$u_n = u_{n-1} \times q = \left(u_0 \times q^{n-1}\right) \times q = u_0 \times q^n$

Sinon, $u_n = u_0 q^n = u_0 q^p \times q^{n-p} = u_p q^{n-p}$.

III.3 Variations

Théorème :

Soit (u_n) un suite géométrique de raison q.

- Si $q = 1$, la suite (u_n) est constante.
- Si $q > 1$, la suite (u_n) est croissante si $u_0 > 0$ et décroissante si $u_0 < 0$.
- Si $0 < q < 1$, la suite (u_n) est décroissante si $u_0 > 0$ et croissante si $u_0 < 0$.

Démonstration :
$u_{n+1} - u_n = u_0 q^n - u_0 q^{n-1} = u_0 q^{n-1}(q-1)$ qui est du signe de $u_0(q-1)$ d'où le résultat.

IV.4 Somme des premières puissances d'un nombre q

Théorème

Soit q un nombre non nul.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons s_n la somme $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n$.

- Si $q = 1$, $s_n = n + 1$.
- Si $q \neq 1$, $s_n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

Démonstration :

- Si $q = 1$, c'est évident, puique $q^p = 1$ pour tout p.
- On écrit s_n une première fois puis de nouveau en la multipliant par q et on soustrait terme à terme.
  $s_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1} + q^n$
  $q \times s_n = q + q^2 + q^3 + q^n + q^{n+1}$.
  En soustrayant, on trouve : $qs_n - s_n = q^{n+1} - 1$ (car les autres termes s'annulent deux par deux).
  Par conséquent : $s_n(q-1) = q^{n+1} - 1$ d'où $s_n = \dfrac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$, que l'on peut aussi écrire $\dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$.

V.5 Sommes des termes consécutifs d'une suite géométrique

Théorème :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et soit $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \sum_{i=1}^{n} u_i$.

Alors : $S_n = u_0 \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$

$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p \dfrac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$

Démonstration :

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_0 + u_0 q + \cdots + u_0 q^n = u_0\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^n\right) = u_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

$$u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = u_p + u_p q + \cdots + u_p q^{n-p} = u_p\left(1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-p}\right) = u_p \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}.$$

Exemples :

1. $1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{15} = \dfrac{3^{16}-1}{3-1} = \dfrac{3^{16}-1}{2} = 21\,523\,360$
2. $5^{11} + 5^{12} + \cdots + 5^{20} = 5^{11}\dfrac{5^{20-11+1}-1}{5-1} = 5^{11}\dfrac{5^{10}-1}{4} = 119\,209\,277\,343\,750$
3. Légende de l'échiquier :
   En Inde, le roi Belkib (ou Bathait), qui s'ennuie à la cour, demande qu'on lui invente un jeu pour le distraire. Le sage Sissa invente alors un jeu d'échecs, ce qui ravit le roi. Pour remercier Sissa, le roi lui demande de choisir sa récompense, aussi fastueuse qu'elle puisse être. Sissa choisit de demander au roi de prendre le plateau du jeu et, sur la première case, poser un grain de riz, ensuite deux sur la deuxième, puis quatre sur la troisième, et ainsi de suite, en doublant à chaque fois le nombre de grains de riz que l'on met. Le roi et la cour sont amusés par la modestie de cette demande. Mais lorsqu'on la met en œuvre, on s'aperçoit qu'il n'y a pas assez de grains de riz dans tout le royaume pour la satisfaire.

Réponse : $N = 2^{64} - 1 = 18\,446\,744\,073\,709\,551\,615 \approx 1,9^{19}$

VI.6 Caractérisation d'une suite géométrique

Propriété

Les suites géométriques sont les suites dont le terme général est de la forme aq^n.

Démonstration

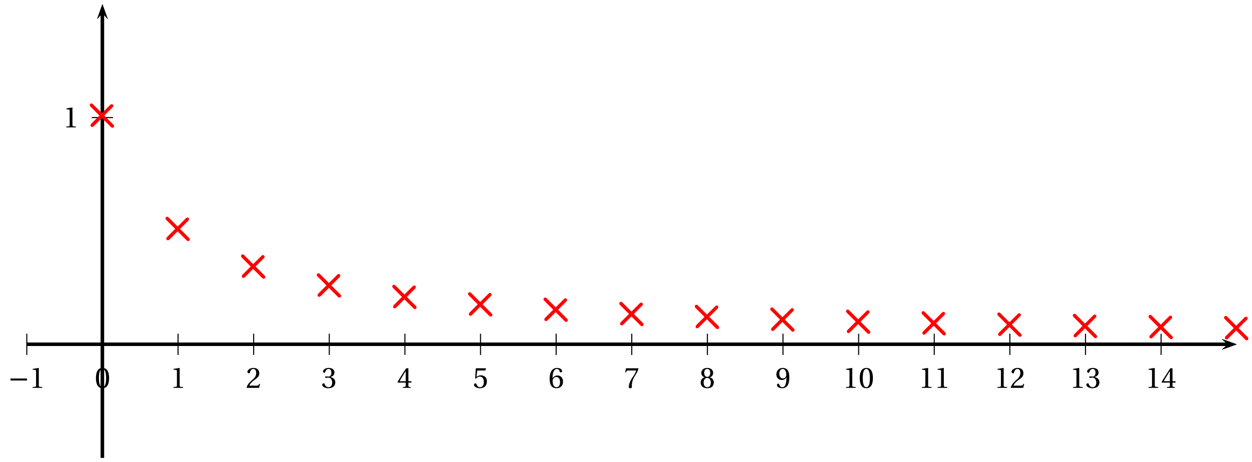
- Si (u_n) est géométrique, $u_n = aq^n$.
- On suppose qu'il existe q tel que, pour tout n, $u_n = aq^n$.
  Alors : $u_{n+1} = aq^{n+1} = aq^n \times q = q \times u_n$ donc (u_n) est géométrique de raison q.
  Le premier terme est alors $u_0 = a$.

VI Notion de limite d'une suite

On s'intéresse au comportement des termes de la suite quand les valeurs de n, prennent des valeurs aussi grandes que l'on veut, c'est-à-dire, tendent vers $+\infty$.

A) **Limite finie** :

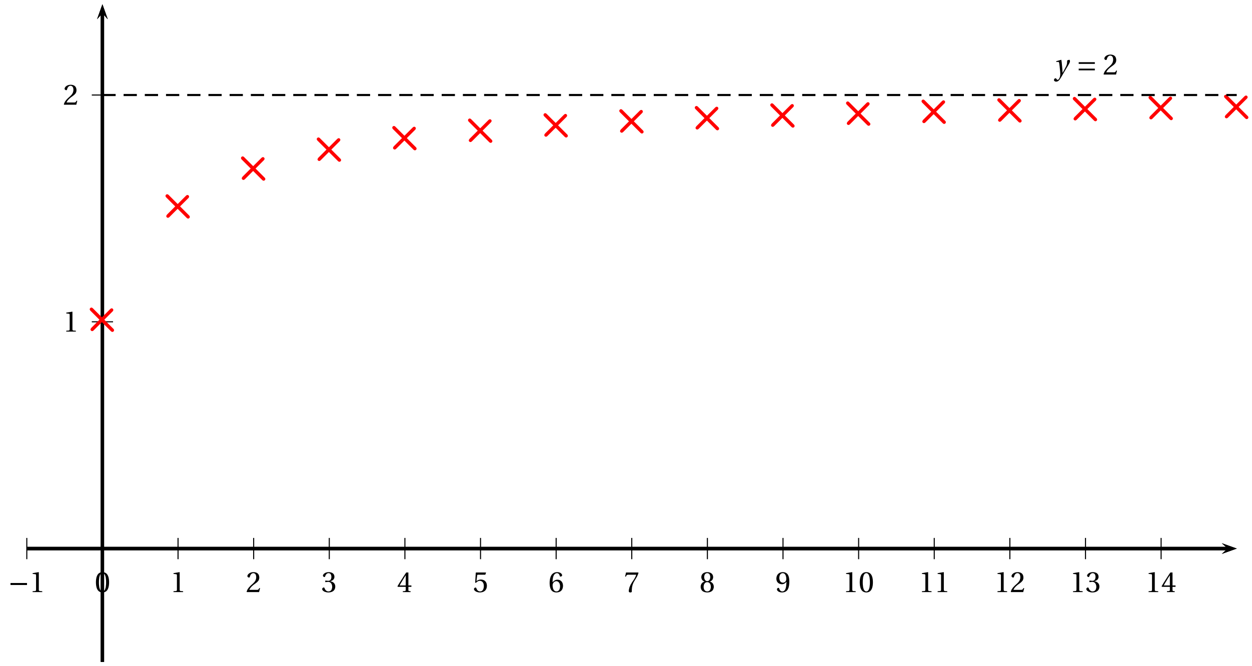
Exemple graphique 1



Graphiquement, les termes de la suite (ordonnées des points) semblent se rapprocher de plus en plus de 0.

On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$; on dit que la suite (u_n) converge vers 0 ou que le terme u_n tend vers 0.

Exemple graphique 2



Graphiquement, les termes de la suite (ordonnées des points) semblent se rapprocher de plus en plus de 2.

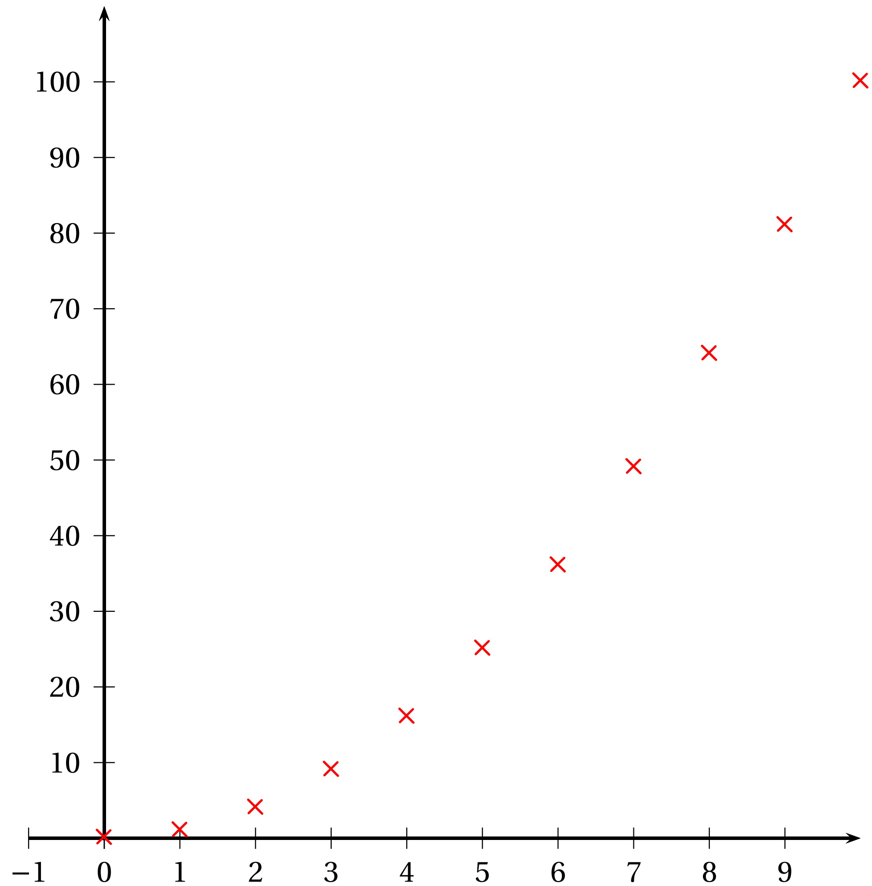
On note : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 20$; on dit que la suite (u_n) converge vers 2 ou que le terme u_n tend vers 2.

Propriété (admise)

Les suites de terme général $\dfrac{1}{n}$, $\dfrac{1}{n^2}$, …, $\dfrac{1}{n^k}$ où k est un entier naturel et $\dfrac{1}{\sqrt{n}}$ tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

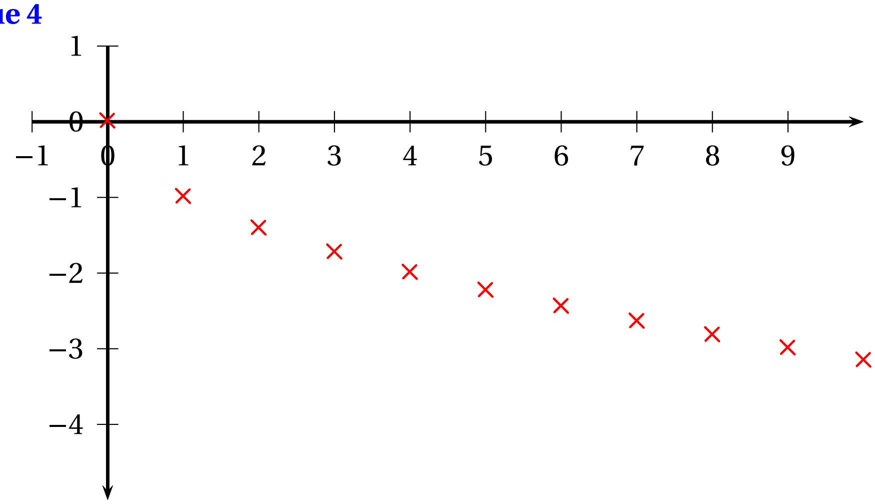
B) **Limite infinie** :

Exemple graphique 3



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exemple graphique 4



Les termes de la suite semblent devenir aussi grands que l'on veut en valeur absolue, en étant négatifs.
On note $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$.

Propriété

Les suites de terme général n, n^2, n^k ($k$entier naturel non nul) et $\sqrt{n}$ tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

⚠**Remarque :** il existe des suites qui n'ont pas de limite : exemple : $u_n = (-1)^n$ qui alterne entre -1et 1

Remarques : on peut conjecturer des limites de fonctions par un graphique (en représentant les points de coordonnées $(n\ ;\ u_n)$), en regardant les résultats d'un tableur (ou calculatrice) ou en appliquant des règles de calculs sur les limites.

- Graphiquement : voir précédemment.
- Tableur : considérons la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = 0,8u_n + 5$.
  Dans un tableur, on obtient :

1	n	u_n
2	0	3
3	1	« $= 0.8 * B2 + 5$ »
4	2	$10,92$
⋮	⋮	⋮
57	55	$24,9998971$
58	56	$24,9999177$
59	57	$24,9999342$
60	58	$24,9999473$
51	59	$24,9999579$

  On conjecture que la suite tend vers 25 quand n tend vers $+\infty$.