BACCALAURÉAT BLANC

décembre 2021

SPÉCIALITÉ MATHÉMATIQUES

DURÉE DE L'ÉPREUVE : **4 heures**

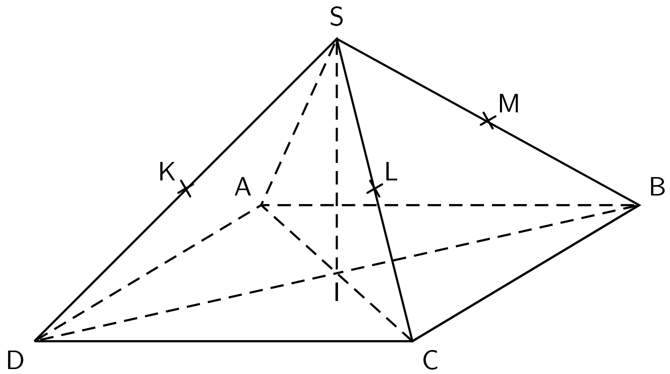
Ce sujet comporte 4 pages, numérotées de 1 à 4

L'utilisation d'une calculatrice est autorisée, mais pas le prêt entre candidats

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice I

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.
Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.
Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.
Aucune justification n'est demandée.



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur.
Le point I est le centre du carré ABCD.
On suppose que : IC = IB = IS $= 1$.
Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) **c.** (AC) et (SB) **d.** (LM) et (AD)

Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\ ;\ \overrightarrow{\mathrm{IC}},\ \overrightarrow{\mathrm{IB}},\ \overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.
Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{A}(-1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{B}(0\ ;\ 1\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{C}(1\ ;\ 0\ ;\ 0)\ ;\mathrm{D}(0\ ;\ -1\ ;\ 0)\ ;\ \mathrm{S}(0\ ;\ 0\ ;\ 1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a. $\left(\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\right)$ **b.** $\left(\frac{1}{4}\ ;\ -\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{4}\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\ ;\ \frac{1}{2}\ ;\ 1\right)$

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ **b.** $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& t\\ z &=& -t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

b. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1+2t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

c. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

d. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

5. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\left\{\begin{array}{l} x=1+2t\\ y=-2+t\\ z=4-t\end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$.

Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

a. $P(2\ ;\ 1\ ;\ -1)$ **b.** $Q(-3\ ;\ -4\ ;\ 6)$ **c.** $R(-3\ ;\ -4\ ;\ -2)$ **d.** $T(-5\ ;\ -5\ ;\ 1)$

Exercice II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. **a.** Préciser la limite de la fonction f en $+\infty$.

   b. Justifier que l'axe des ordonnées est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Montrer que, pour tout nombre réel x de l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}$$

   où f' désigne la fonction dérivée de la fonction f.

3. Déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   On établira un tableau de variations de la fonction f dans lequel apparaîtront les limites.

4. Soit m un nombre réel. Préciser, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

   a. Montrer que a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.

   b. Calculer $g'(x)$ pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, puis dresser le tableau de variations de g sur $[0\ ;\ +\infty[$.

   c. Montrer qu'il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

Exercice III

Un biologiste s'intéresse à l'évolution de la population d'une espèce animale sur une île du Pacifique.

Au début de l'année 2020, cette population comptait 600 individus. On considère que l'espèce sera menacée d'extinction sur cette île si sa population devient inférieure ou égale à 20 individus.

Le biologiste modélise le nombre d'individus par la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. Estimer, selon ce modèle, le nombre d'individus présents sur l'île au début de l'année 2021 puis au début de l'année 2022.
   Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

2. Montrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ et dresser son tableau de variations.

3. Résoudre dans l'intervalle $[0\,;\,1]$ l'équation $f(x) = x$.
   On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

4. **a.** Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$.

   b. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

   c. Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n).

5. Le biologiste a l'intuition que l'espèce sera tôt ou tard menacée d'extinction.

   a. Justifier que, selon ce modèle, le biologiste a raison.

   b. Le biologiste a programmé en langage Python la fonction **menace()** ci-dessous :

```
def menace()
   u = 0,6
   n = 0
   while u > 0,02
         u = 0,75*u*(1-0,15*u)
         n = n+1
   return n
```

   Donner la valeur numérique renvoyée lorsqu'on appelle la fonction menace().
   Interpréter ce résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice IV

Dans une entreprise, on s'intéresse à la probabilité qu'un salarié soit absent durant une période d'épidémie de grippe.

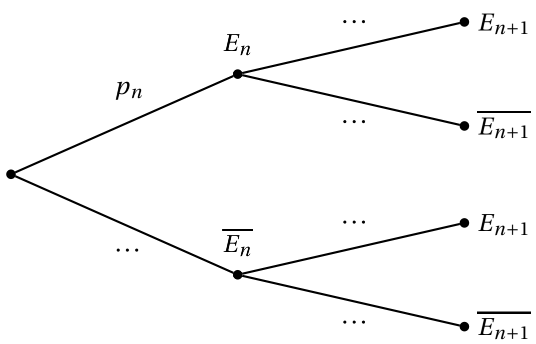
- Un salarié malade est absent
- La première semaine de travail, le salarié n'est pas malade.
- Si la semaine n le salarié n'est pas malade, il tombe malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,04$.
- Si la semaine n le salarié est malade, il reste malade la semaine $n+1$ avec une probabilité égale à $0,24$.

On désigne, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, par E_n l'évènement « le salarié est absent pour cause de maladie la n-ième semaine ». On note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
On a ainsi : $p_1 = 0$ et, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 : $0 \leqslant p_n < 1$.

1. **a.** Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

   b. Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

2. **a.** Recopier sur la copie et compléter l'arbre de probabilité donné ci-dessous



   b. Montrer que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1,
   $p_{n+1} = 0,2p_n + 0,04$.

   c. Montrer que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 par $u_n = p_n - 0,05$ est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison r.
   En déduire l'expression de u_n puis de p_n en fonction de n et r.

   d. En déduire la limite de la suite (p_n).
   Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.