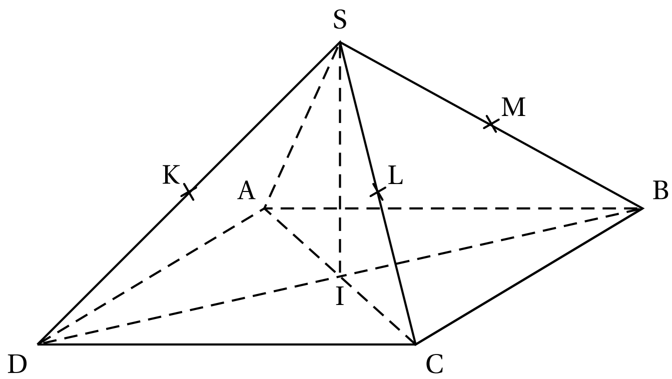
Correction du bac blanc

I



SABCD est une pyramide régulière à base carrée ABCD dont toutes les arêtes ont la même longueur. Le point I est le centre du carré ABCD. On suppose que : IC = IB = IS = 1.

Les points K, L et M sont les milieux respectifs des arêtes [SD], [SC] et [SB].

1. Les droites suivantes ne sont pas coplanaires :

   a. (DK) et (SD) **b.** (AS) et (IC) $\boxed{\textbf{c. } \text{(AC) et (SB)}}$ **d.** (LM) et (AD)

   On procède par élimination.

   - Les droites (DK) et (SD) sont sécantes en D donc coplanaires; on élimine **a.**
   - Les droites (AS) et (IC) sont sécantes en A donc coplanaires; on élimine **b.**
   - Les droites (LM) et (AD) sont toutes deux parallèles à (BC) donc parallèles entre elles; elles sont donc coplanaires; on élimine **d.**

   Réponse c.

   Pour les questions suivantes, on se place dans le repère orthonormé de l'espace $\left(\mathrm{I}\,;\,\boxed{\mathrm{IC}},\,\equiv,\,\overrightarrow{\mathrm{IS}}\right)$.

   Dans ce repère, on donne les coordonnées des points suivants :

$$\mathrm{I}(0\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{A}(-1\,;\,0\,;\,0)\,;\,\mathrm{B}(0\,;\,1\,;\,0)\,;\,\mathrm{C}(1\,;\,0\,;\,0);\mathrm{D}(0\,;\,-1\,;\,0)\,;\,\mathrm{S}(0\,;\,0\,;\,1).$$

2. Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

   a. $\left(\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\right)$ $\boxed{\textbf{b. } \left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)}$ **c.** $\left(-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$ **d.** $\left(-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\,;\,1\right)$

   - Le milieu K de [SD] a pour coordonnées $\left(0\,;\,-\frac{1}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
   - Le milieu L de [SC] a pour coordonnées $\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$.
   - Le milieu N de [KL] a donc pour coordonnées $\left(\frac{1}{4}\,;\,-\frac{1}{4}\,;\,\frac{1}{2}\right)$.

   Réponse b.

3. Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AS}}$ sont :

   a. $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ $\boxed{\textbf{b. } \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}$ **c.** $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ **d.** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Réponse b.

4. Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

a. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& t\\ z &=& -t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

b. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1+2t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+2t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

c. $\boxed{\left\{\begin{array}{rcr} x &=& t\\ y &=& 0\\ z &=& 1+t\end{array}\right. (t \in \mathbb{R})}$

d. $\left\{\begin{array}{rcr} x &=& -1-t\\ y &=& 1+t\\ z &=& 1-t\end{array}\right.$ $(t \in \mathbb{R})$

La droite (AS) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix}1\\ \text{à}\\ 1\end{pmatrix}$; la seule représentation qui convienne est la c.

Réponse c.

5. Soit Δ la droite dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2+t \\ z = 4-t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$

Parmi les points suivants, lequel appartient à la droite Δ ?

a. $P(2\,;\,1\,;\,-1)$ **b.** $Q(-3\,;\,-4\,;\,6)$ **c.** $R(-3\,;\,-4\,;\,-2)$ **d.** $T(-5\,;\,-5\,;\,1)$

Réponse b), en prenant $t = -2$

II

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé.

1. (a) D'après le cours, la limite de la fonction f en $+\infty$ est $\boxed{+\infty}$. (**croissances comparées**)

   (b) On cherche la limite de f en 0 :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 0} \mathrm{e}^x = 1\\ \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$$

   Donc l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathscr{C}_f$.

2. Pour tout réel x de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on a : $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \times x - \mathrm{e}^x \times 1}{x^2} = \boxed{\dfrac{\mathrm{e}^x(x-1)}{x^2}}$.

3. Pour déterminer les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$, on cherche le signe de $f'(x)$. $x^2 > 0$ et $\mathrm{e}^x > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $x - 1$.

x	0		1		$+\infty$
$x-1$	‖	$-$	0	$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f(1) = \dfrac{\mathrm{e}^1}{1} = \mathrm{e}$

On établit le **tableau de variations** de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit m un nombre réel. On cherche, en fonction des valeurs du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.
   Cela revient à chercher le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_f$ et de la droite horizontale d'équation $y = m$.
   D'après le tableau de variations :
   - si $m < \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ n'admet pas de solution ;
   - si $m = \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet une solution unique $x = 1$;
   - si $m > \mathrm{e}$, l'équation $f(x) = m$ admet deux solutions.
5. On note Δ la droite d'équation $y = -x$.
   On note A un éventuel point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse a en lequel la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.
   (a) La tangente en a est parallèle à la droite Δ si et seulement si le coefficient directeur de la tangente est égal à -1, autrement dit quand $f'(a) = -1$.
   $f'(a) = -1 \iff \dfrac{\mathrm{e}^a(a-1)}{a^2} = -1 \iff \mathrm{e}^a(x-1) = -a^2 \iff \boxed{\mathrm{e}^a(x-1) + a^2 = 0}$
   ce qui veut dire que le nombre a est solution de l'équation $\mathrm{e}^x(x-1) + x^2 = 0$.
   On note g la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x(x-1) + x^2$.
   On admet que la fonction g est dérivable et on note g' sa fonction dérivée.
   (b) $g'(x) = \mathrm{e}^x \times (x-1) + \mathrm{e}^x \times 1 + 2x = \boxed{x\mathrm{e}^x + 2x}$
   Sur $\mathbb{R}$, $\mathrm{e}^x > 0$ donc sur $[0\,;\,+\infty[$, $x\mathrm{e}^x + 2x \geqslant 0$ donc $g'(x) \geqslant 0$.
   $$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x-1 = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$$
   $g(0) = \mathrm{e}^0(0-1) + 0 = -1$
   On dresse le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	
$g(x)$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

   (c) On complète le tableau de variations de g :
   D'après ce tableau, l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique a sur $[0\,;\,+\infty[$, donc il existe un unique point A en lequel la tangente à $\mathscr{C}_f$ est parallèle à la droite Δ.

x	0		a		$+\infty$
$g(x)$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

III

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,6 \\ u_{n+1} & = & 0,75u_n(1-0,15u_n) \end{array}\right.$$

où pour tout entier naturel n, u_n désigne le nombre d'individus, en milliers, au début de l'année $2020+n$.

1. • 2021 correspond à $n=1$, donc $u_1 = 0,75u_0 \times (1-0,15u_0) = 0,75 \times 0,6 \times (1-0,15\times 0,6)$ $= 0,45 \times (1-0,09) = 0,45 \times 0,91 = 0{,}4095$ soit environ $\boxed{410}$ individus.
   • 2022 correspond à $n=2$, donc $u_2 = 0,75u_1 \times (1-0,15u_1) = 0,75 \times 0{,}4095 \times (1-0,15\times 0{,}4095)$ $= 0{,}307\,125 \times (1-0{,}061\,425) = 0{,}307\,125 \times 0{,}938\,575) \approx 0{,}2883$ soit environ $\boxed{288}$ individus.

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ par

$$f(x) = 0,75x(1-0,15x).$$

1. f est une fonction polynôme dérivable sur $\mathbb{R}$.
   $f(x) = 0,75 - 0,1125x^2$ donc $f'(x) = 0,75 - 0,1125\times 2x = \boxed{0,75-0,225x}$
   Or $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{0,75}{0,225} = \dfrac{750}{225} = \dfrac{10}{3} > 1$.
   f' est affine, de coefficient directeur négatif, donc $f'(x) > 0$ pour $x < \dfrac{10}{3}$, donc en particulier sur $[0;1]$.
   Sur $[0;1]$, $f'(x) > 0$, donc $f$est strictement croissante de $f(0) = 0$ à $f(1) = 0,75 \times 0,85 = 0{,}6375$.

x	0	1
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 $\nearrow$	$0,6375$

   Sur $[0;1]$, $f(x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) = x \iff 0,75x(1-0,15x) - x = 0 \iff x[0,75(1-0,15x)-1] = 0$
   $\iff x(0,75-0{,}1125x-1) = 0 \iff x(-0,25-0{,}1125x) = 0 \iff x = 0$ ou $-0,25-0{,}1125$
   $\iff x = 0$ ou $x = -\dfrac{0,25}{0{,}1125} < 0$.
   Donc, dans $[0;1]$, $\boxed{\mathscr{S} = \{0\}}$.
   On remarquera pour la suite de l'exercice que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

3. (a) Démontrons par récurrence que : $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$ pour tout n.

   Initialisation : on a vu que $0 \leqslant 0{,}4095 \leqslant 0,6 \leqslant 1$, soit $0 \leqslant u_1 \leqslant u_0 \leqslant 1$: la relation est vraie au rang 0;
   Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, on ait :
   $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1$; la fonction f étant strictement croissante sur $[0;1]$, on a donc :
   $f(0) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \leqslant f(1)$,
   soit puisque $f(0) = 0$ et $f(1) = 0,75 \times (1-0,15) = 0{,}6375 \leqslant 1$:
   $0 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$: la relation est donc vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : la relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n naturel quelconque, elle est vraie au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence :
   Pour tout entier naturel n, $\boxed{0 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n \leqslant 1}$.

   (b) La suite (u_n) est d'après la question précédente décroissante et minorée par 0; elle est donc est **convergente**.

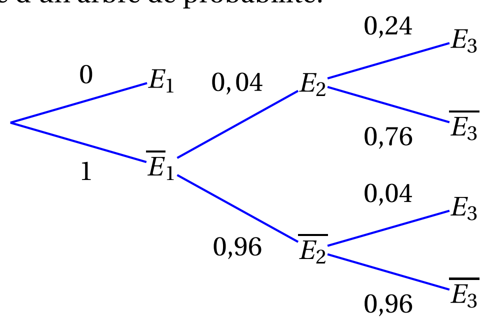
   (c) Le résultat précédent montre que la suite (u_n) converge vers un nombre $\ell \geqslant 0$ et comme f est continue, ce nombre ℓ vérifie l'équation $f(x) = x$, dont on a vu à la question **3.** qu'elle n'avait que 0 comme solution.
   Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell = 0}$.

4. (a) L'étude précédente a montré que le nombre d'individus décroît, donc le biologiste a raison puisque la limite de la suite du nombre d'individus est égale à zéro.

   (b) L'algorithme calcule les termes de la suite tant que ceux-ci sont supérieurs à 0,02
   Il s'arrête à $n = 11$ car $u_{10} \approx 0,019$
   L'espèce sera donc menacée d'extinction en 2031.

IV

1. (a) Déterminer la valeur de p_3 à l'aide d'un arbre de probabilité.

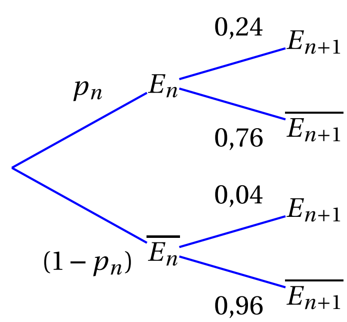


   Théorème des probabilités totales : $E_3 = E_2 \cap E_3 \cup \overline{E_2} \cap E_3$ (union d'événements disjoints)
   $p_3 = P(E_3) = 0,04 \times 0,24 + 0,96 \times 0,04 = \boxed{0,048}$.

   (b) Sachant que le salarié a été absent pour cause de maladie la troisième semaine, déterminer la probabilité qu'il ait été aussi absent pour cause de maladie la deuxième semaine.

$$\mathrm{P}_{E_3}(E_2) = \frac{\mathrm{P}(E_2 \cap E_3)}{\mathrm{P}(E_3)} = \frac{0,04 \times 0,24}{0,048} = \boxed{0,2}$$

2. (a) Complétons l'arbre



   (b) En appliquant le théorème des probabilités totales :

$$E_{n+1} = E_n \cap E_{n+1} \cup \overline{E_n} \cap E_{n+1} \text{(union d'événements disjoints)}$$
$$p_{n+1} = 0,24p_n + 0,04(1 - p_n) = (0,24 - 0,04)p_n + 0,04 = \boxed{0,2p_n + 0,04}$$

   (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0,05 = 0,2p_n + 0,04 - 0,05 = 0,2p_n - 0,01 = 0,2(p_n - 0,05) = \boxed{0,2u_n}$$

   donc (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_1 = -0,05$ et la raison $q = 0,2$.

   Par propriété, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0,05 \times 0,2^{n-1}$
   et donc : $p_n = u_n + 0,05 = \boxed{0,05(1 - 0,2^{n-1})}$.

   (d) Limite de la suite (p_n).
   Comme $|0,2| < 1$ alors par théorème : $\lim (0,2)^{n-1} = 0$ et donc $\boxed{\lim_{n\to+\infty} p_n = 0,05}$.