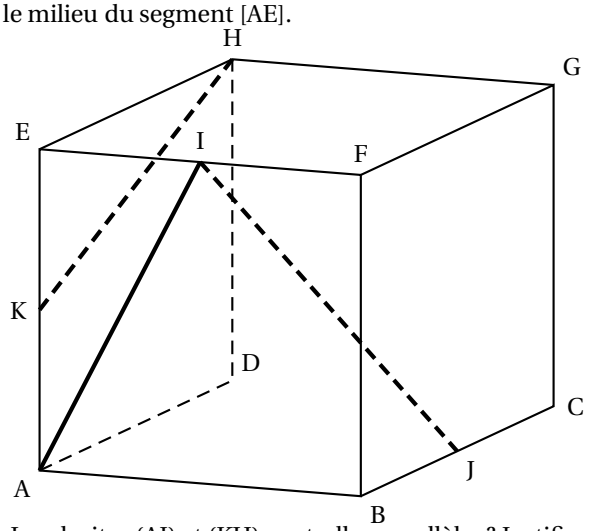
Spécialité : devoir sur feuille n° 3

I

On considère un cube ABCDEFGH. Le point I est le milieu du segment [EF], le point J est le milieu du segment [BC] et le point K est le milieu du segment [AE].



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse,

   Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.

2. (a) Donner les coordonnées des points I et J.

   (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{\text{IJ}}$, $\overrightarrow{\text{AE}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont coplanaires.

   On considère le plan $\mathscr{P}$ d'équation $x+3y-2z+2=0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+t \\ y & = & 8-2t \\ z & = & -2+3t \end{array}\right. ,\, t \in \mathbb{R}$$

$$\text{et } d_2 : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 4+t \\ y & = & 1+t \\ z & = & 8+2t \end{array}\right. ,\, t \in \mathbb{R}.$$

3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.
5. Montrer que le point L(4 ; 0 ; 3) est le projeté orthogonal du point M(5 ; 3 ; 1) sur le plan $\mathscr{P}$.

II

Dans tout ce qui suit, m désigne un nombre réel quelconque.

Partie A

Soit f la fonction définie et dérivable sur l'ensemble des nombres réels $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = (x+1)\mathrm{e}^{x}.$$

1. Calculer la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$.
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que pour tout réel x, $f'(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x}$.
3. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

Partie B

On définie la fonction g_m sur $\mathbb{R}$ par :

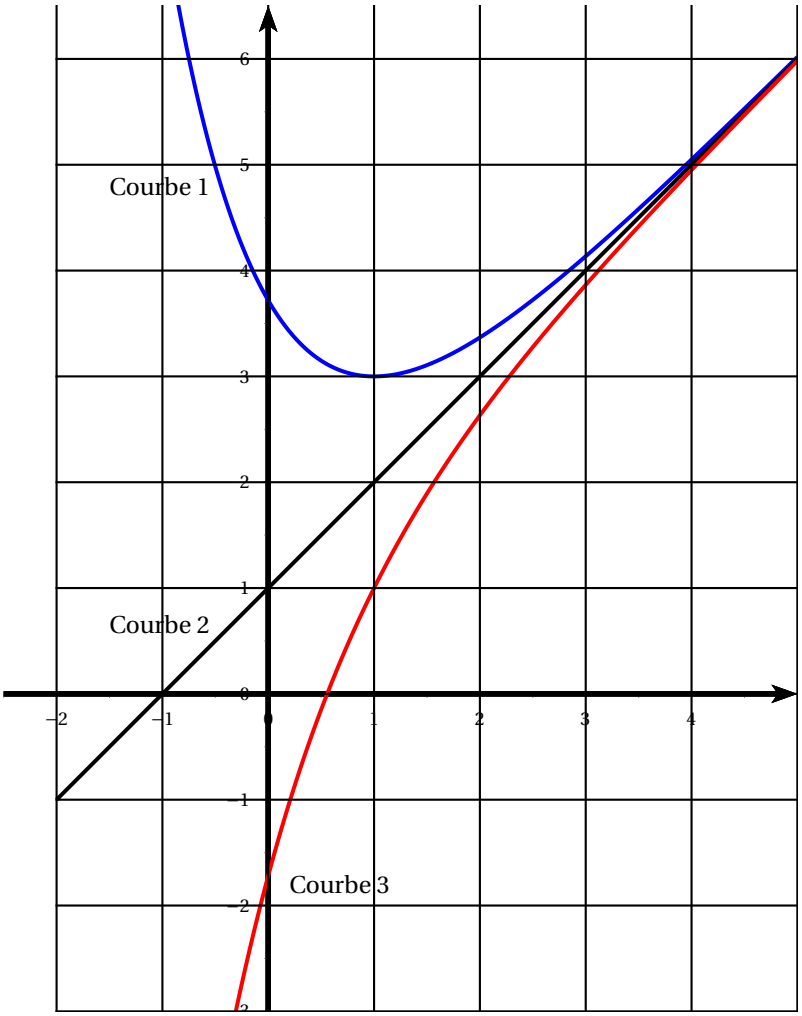
$$g_m(x) = x+1-m\mathrm{e}^{-x}$$

et on note $\mathscr{C}_m$ la courbe de la fonction g_m dans un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ du plan.

1. (a) Démontrer que $g_m(x) = 0$ si et seulement si $f(x) = m$.

   (b) Déduire de la partie A, sans justification, le nombre de points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_m$ avec l'axe des abscisses en fonction du réel m.

2. On a représenté en annexe 2 les courbes $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_{\mathrm{e}}$, et $\mathscr{C}_{-\mathrm{e}}$ (obtenues en prenant respectivement pour m les valeurs 0, e et $-$e).
   Identifier chacune de ces courbes sur la figure de l'annexe en justifiant.
3. Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}_m$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$ d'équation
   $y = x+1$ suivant les valeurs du réel m.



III

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier.

À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.

On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ». On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ». On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».

À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} & = & \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} & = & \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} & = & \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

L'objectif de cet exercice est d'estimer dans quelle galerie le lapin a la plus grande probabilité de se trouver à long terme.

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. Quelle formule faut-il entrer dans la cellule C3 et recopier vers le bas pour remplir la colonne C ?
2. Quelle conjecture peut-on émettre ?

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.
   (a) Démontrer que la suite (u_n) est géométrique en précisant sa raison.
   (b) Donner, pour tout entier naturel n, l'expression de u_n en fonction de n.
2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n.
   (a) Expliquer pourquoi pour tout entier naturel n, $a_n + b_n + c_n = 1$ et en déduire que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} = -\frac{1}{6}v_n$.
   (b) En déduire, pour tout entier naturel n, l'expression de v_n en fonction de n.
3. En déduire que pour tout entier naturel n, on a :
   $a_n = \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$
   $b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$ et
   $c_n = \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$.
4. Que peut-on en déduire sur la position du lapin après un très grand nombre d'étapes ?

IV

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) = \frac{3x^2 + 15x - 10}{3x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. (a) Montrer que , pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f'(x) = \frac{-15x + 20}{3x^3}.$$
   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ et en déduire les variations de f sur $\mathbb{R}^*$.
2. (a) Montrer que , pour tout $x \in \mathbb{R}^*$,
   $$f''(x) = \frac{10x - 20}{x^4}.$$
   (b) Étudier le signe de $f''(x)$ et. en déduire la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (c) Montrer que le point de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse 2 est un point d'inflexion.