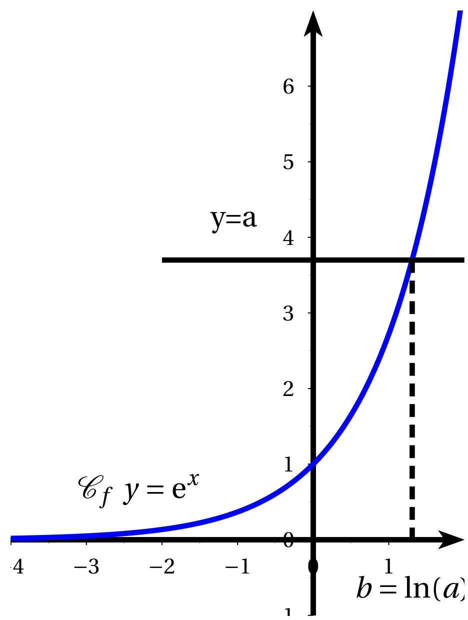
Fonction logarithme népérien (ln)

Table des matières

I Lien avec la fonction exponentielle

Définition

La fonction logarithme népérien, notée ln, est la fonction définie sur $]0;+\infty[$, qui à tout nombre réel $x>0$ associe l'unique solution de l'équation $e^y = x$, d'inconnue y.
On note cette solution $y = \ln x$.



Conséquences :

1. Pour tout réel $x > 0$ et pour tout réel y,
$$e^y = x \Longleftrightarrow y = \ln x$$
2. Pour tout réel $x > 0$,
$$e^{\ln x} = x$$
3. Pour tout réel x, $\ln\left(e^x\right) = x$
4. $\ln 1 = 0$ (car $1 = e^0$)
5. $\ln e = 1$ (car $e = e^1$)
6. $\ln\left(\dfrac{1}{e}\right) = -1$ (car $\dfrac{1}{e} = e^{-1}$)

Remarque : par croissance de la fonction exponentielle, on obtient que la fonction ln est croissante : $(a > b \Rightarrow \ln(a) > \ln(b))$.

Notation : on écrit $\boxed{\ln(x) = \ln x}$

Conséquences

Pour tous réels a et b strictement positif :

- $\ln a = \ln b$ si et seulement si $a = b$
- $\ln a > \ln b$ si et seulement si $a > b$

Applications :

I.1 Résoudre une équation avec ln

Pour résoudre une équation du type $\ln(u(x)) = \ln(v(x))$:

- Rechercher l'ensemble de définition $\mathscr{D}$ des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;
- Résoudre dans $\mathscr{D}$, l'équation $u(x) = v(x)$.

Exemple : On va résoudre l'équation $\ln(x+2) = \ln(3-x)$.
Conditions d'existence : $x + 2 > 0$ et $3 - x > 0$.
C'est-à-dire : $x > -2$ et $3 > x$. D'où $\mathscr{D} =]-2\,;3[$.
Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $\ln(x+2) = \ln(3-x)$ équivaut à $x + 2 = 3 - x$ c'est-à-dire $2x = 1$ ou encore $x = \dfrac{1}{2}$.
Ce nombre appartient bien à $\mathscr{D}$.
' Donc l'ensemble des solutions est $\boxed{\mathscr{S} = \left\{\dfrac{1}{2}\right\}}$.

I.2 Résoudre une inéquation avec ln

Pour résoudre une inéquation du type $\ln(u(x)) < \ln(v(x))$:

- Rechercher l'ensemble $\mathscr{D}$ des réels tels que $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$;

- Résoudre dans $\mathscr{D}$, l'inéquation $u(x) < v(x)$.

Exemple : on va résoudre l'inéquation $\ln(x^2+3x) < \ln 18$.
Condition d'existence : $x^2+3x>0$ soit $x(x+3)>0$. D'où $\mathscr{D} =]-\infty\,;-3[\cup]0\,;+\infty[$.
Pour tout $x \in \mathscr{D}$, $\ln(x^2+3x) < \ln 18$ équivaut à $x^2+3x<18$ ou encore $x^2+3x-18<0$.
Le trinôme $x^2+3x-18$ a pour discriminant $\Delta = 81$ et pour racines -6 et 3.
Donc $x^2+3x-18<0 \iff x \in]-6\,;3[$.
En tenant compte du fait que x appartient à $\mathscr{D}$, on a finalement, $S =]-6\,;-3[\cup]0\,;3[$.

II Relations fonctionnelles

Théorème (relation fonctionnelle)

Pour tous réels strictement positifs a et b on a : $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Démonstration :

- $e^{\ln(ab)} = ab$ (par définition de la fonction ln)
- $e^{\ln a + \ln b} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = ab$ (propriété de la fonction exponentielle)
- On en déduit que : $e^{\ln(ab)} = e^{\ln a + \ln b}$ d'où $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

Conséquences :

Pour tous réels strictement positifs a, b et tout entier naturel p, on a :

1. $\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$
2. $\ln \dfrac{1}{a} = -\ln a$
3. $\ln\left(a^p\right) = p \ln a$
4. $\ln \sqrt{a} = \dfrac{1}{2} \ln a$

Démonstration :

- $a \times \dfrac{1}{a} = 1$ donc $\ln a \times \dfrac{1}{a} = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{a}\right)$; or $\ln(1) = 0$ d'où $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln\left(a \times \dfrac{1}{b}\right) = \ln(a) + \ln\left(\dfrac{1}{b}\right)$ (relation fonctionnelle)
  $= \ln a + (-\ln(b)) = \ln(a) - \ln(b) = \ln a - \ln b$.
- $\ln\left(a^p\right) = p\ln(a)$ (se démontre par récurrence)

  — Initialisation : « évidente »
  — Hérédité : on suppose que $\ln\left(a^p\right) = p\ln(a)$ pour un entier p.
  Alors : $\ln\left(a^{p+1}\right) = \ln\left(a^p \times a\right) = \ln\left(a^p\right) + \ln(a) = p\ln(a) + \ln(a) = (p+1)\ln(a)$.
  La propriété est donc héréditaire.
  Elle donc vraie pour tout p entier.
- $\ln a = \ln\left(\sqrt{a}^2\right) = 2\ln\left(\sqrt{a}\right)$ donc $\ln\left(\sqrt{a}\right) = \dfrac{1}{2}\ln a$

Exemples :

Simplifions $A=\ln\dfrac{(x+2)^2}{\sqrt{x+2}}$

$$A=\ln\frac{(x+2)^2}{\sqrt{x+2}} \quad = \quad \ln(x+2)^2-\ln\sqrt{x+2} \quad = \quad 2\times\ln(x+2)-\frac{1}{2}\times\ln(x+2) \quad = \quad \frac{3}{2}\times\ln(x+2)$$

Exemple : résoudre une inéquation avec une inconnue à l'exposant :

On cherche à résoudre l'inéquation $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 0,01$ avec $n\in\mathbb{N}$.

La fonction ln est croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc l'inéquation $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n \leqslant 0,01$ est équivalente à $\ln\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right] \leqslant \ln 0,01$.

Pour tout $a>0$, $\ln(a^n)=n\ln a$, donc l'inéquation s'écrit : $n\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)\leqslant \ln 0,01$.

En divisant chaque membre par $\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)$ qui est strictement négatif, le sens de l'inégalité change.

$$n\geqslant\frac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)},\quad \text{or} \quad \frac{\ln 0,01}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}\approx 4,19$$

L'ensemble solution est constitué de tous les entiers $n\geqslant 5$.

Exemple : le taux annuel d'intérêts composés du livret A de caisse d'épargne est $0,5\,\%$.
On place un capital. Au bout de combien d'années le capital double-t-il.

Notons C_0 le capital initial et C_n le capital acquis au bout de n années.

On a $C_{n+1} = C_n + \dfrac{0,5}{100}C_n = 1,005C_n$ (1,005 est le coefficient multiplicateur).
(C_n) est une suite géiométrique.
Pour tout n, on a $C_n = C_0 \times 1,005^n$.
On cherche donc les valeurs de n telles que $C_n \geqslant C_0 \Leftrightarrow 1,005^n \geqslant 2$.
En appliquant la fonction ln, qui est croissante, on obtient : $\ln\left(1,005^n\right) \geqslant \ln 2 \Leftrightarrow n \ln 0,005 \geqslant \ln 2$.
En divisant par $\ln 1,005$ qui est positif, on obtient : $n \geqslant \dfrac{\ln 2}{\ln 1,005} \approx 139$.
Avec un taux d'intérêt de 0,5 %, il faut attendre 139 ans pour doubler son capital (hors inflation).

III Étude de la fonction $\ln x$

III.1 Continuité

Propriété (admise)

La fonction logarithme népérien est définie et continue sur $]0;+\infty[$

IV Dérivée de la fonction $\ln$

Théorème

La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

Démonstration : Propriété à démontrer : « $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$ »

On admet que la fonction ln est dérivable sur $]0\,;+\infty[$.
Pour tout réel $x > 0$, on pose $f(x) = \mathrm{e}^{\ln x}$. La fonction ln étant dérivable sur $]0\,;+\infty[$, f est aussi dérivable sur $]0\,;+\infty[$.

Pour tout réel $x > 0$, calculons $f'(x)$ de deux manières :

- $f'(x) = \ln'(x) \times \mathrm{e}^{\ln(x)} = x \ln'(x)$
- $f(x) = x$ donc $f'(x) = 1$.

On en déduit que pour tout réel $x > 0$, $x \ln'(x) = 1$, par suite $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$

V Limite de la fonction $\ln x$

Propriété

$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Démonstration

- Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ »

  Pour tout réel $A > 0$,
  $\ln x > A \iff x > \mathrm{e}^A$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$.

- Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$ »

  Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \dfrac{1}{x}$. On a $x = \dfrac{1}{X}$ donc $\ln x = \ln \dfrac{1}{X} = -\ln X$
  $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} X = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} (-\ln X) = -\infty$ donc par limite d'une composée $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln(x) = -\infty$.

Propriété : Croissances comparées

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$

Démonstration

- Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ »

  Pour tout réel $x > 0$, on effectue le changement de variable : $X = \ln x$, on a alors $x = \mathrm{e}^X$.
  Ainsi $\dfrac{\ln x}{x} = \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = \dfrac{1}{\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}}$.

  Or $\lim\limits_{x\to+\infty} X = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ donc par limite d'un quotient $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{\frac{\mathrm{e}^X}{X}} = 0$.

  Enfin, par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

- Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$ »

  Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \ln x$, on a alors $x \ln x = \mathrm{e}^X \times X$.
  On a $\lim\limits_{x\to 0} X = \lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et par propriété, $\lim\limits_{X\to-\infty} X\mathrm{e}^X = 0$, donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to 0} x \ln x = 0$.

Remarque La propriété précédente est vraie pour n'importe quel polynôme de degré n :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} x^n \ln x = 0$

Propriété : Limite et taux d'accroissement

$$\lim_{h\to 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

Demonstration Propriété à démontrer : « $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$ »

La fonction ln est dérivable en 1 donc, par définition, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)-\ln 1}{h} = \ln'(1)$.

Or $\ln 1 = 0$ et $\ln'(1) = \dfrac{1}{1} = 1$, on obtient donc $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

Levées d'indétermination pour étudier une limite

On cherche à déterminer les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x - 2x)$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$

Dans le cas d'une forme indéterminée qui fait intervenir la fonction ln, on peut :

1. Factoriser et faire apparaître des limites déjà connues :
   Pour tout réel $x > 0$, $\ln x - 2x = x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right)$. Par propriété, $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right) = -2$.
   Donc par limite d'un produit, $\lim\limits_{x\to +\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 2\right) = -\infty$.
   Ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty} (\ln x - 2x) = -\infty$.
2. Effectuer un changement de variable :
   Pour tout réel $x > 0$, on pose $X = \dfrac{1}{x}$, on a alors $x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\ln(1+X)}{X}$.
   On a $\lim\limits_{x\to +\infty} X = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et par propriété, $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$
   Donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to +\infty} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right) = 1$.

VI Variations de la fonction $\ln x$

Propriété

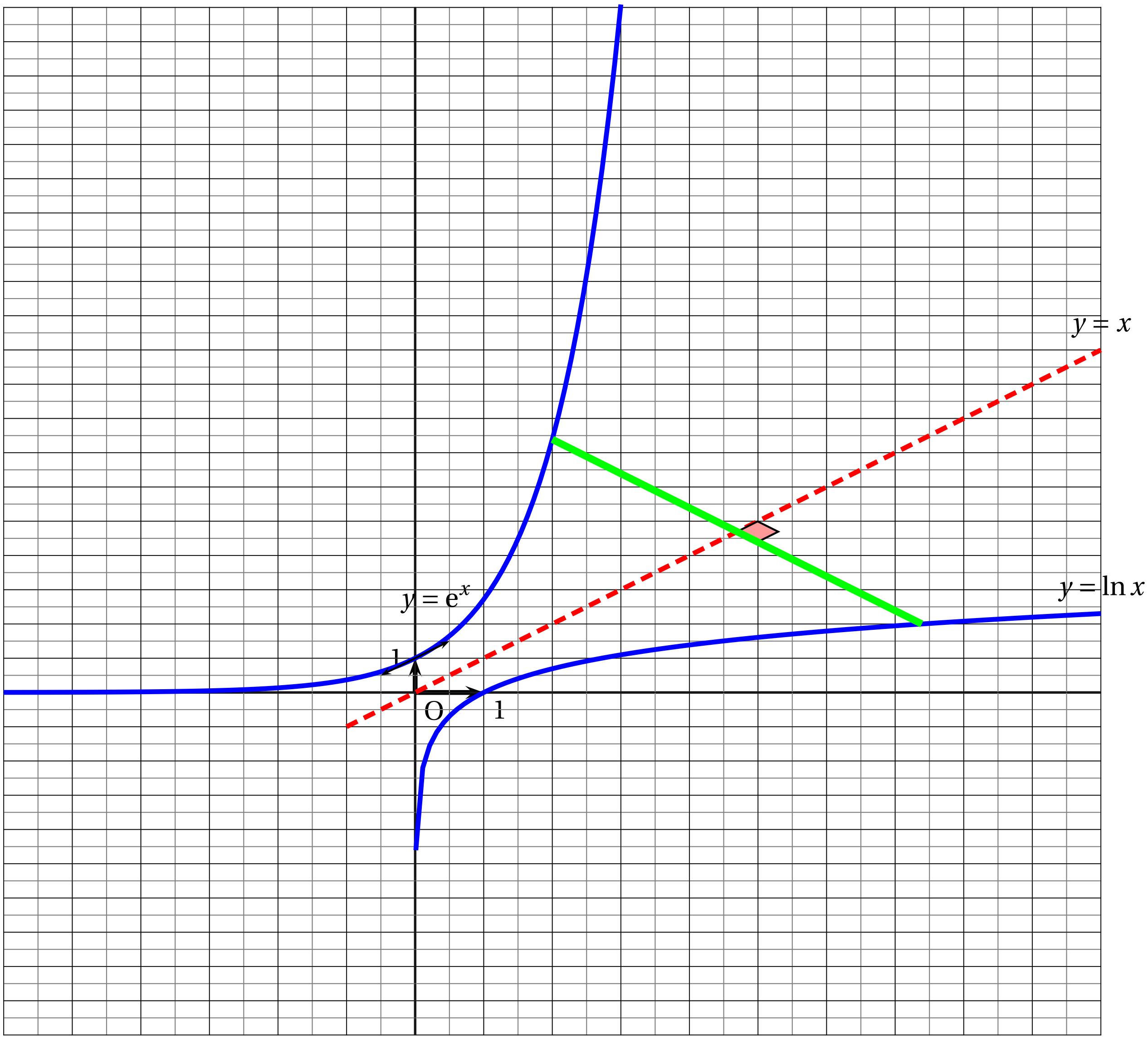
La fonction logarithme népérien est **strictement croissante** sur $]0;+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$		$+$		$+$	
$\ln(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Démonstration :
La fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}^{+*}$ et sa dérivée est la fonction inverse.
Or la fonction inverse est positive sur $\mathbb{R}^{+*}$, donc la fonction logarithme népérien est croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$

Courbe représentative

Remarque : les courbes représentatives des fonctions ln et exp sont symétriques par rapport à la poremière bissectrice (droite d'équation. $y = x$)



Propriété

Une équation de la tangente à la courbe de la fonction ln en 1 est $y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1$ soit $y = x - 1$.

En effet, l'équation est $y = \ln'(1)(x-1) + \ln 1 = 1(x-1) + 0$ donc $y = x - 1$.

VII Étude de la fonction $\ln u(x)$

VIII Limites de la fonction $\ln u(x)$

Méthode

Pour étudier les limites d'une fonction du type $\ln u$, on peut :

- utiliser le théorème sur la limite d'une composée;
- utiliser les théorèmes de comparaison.

Exemple : f est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+2}{x^2}\right)$. Étudier les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

- Pour tout $x>0$, $\dfrac{x+2}{x^2}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^2}$. De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x^2}=0$ donc par limite d'une somme, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+2}{x^2}=0$.
  De plus, $\lim\limits_{X\to0}\ln X=-\infty$ donc par limite d'une composée, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$.
- Pour tout $x>0$, $\dfrac{x+2}{x^2}>\dfrac{x}{x^2}$ donc $\dfrac{x+2}{x^2}>\dfrac{1}{x}$ or la fonction ln est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ donc $f(x)>\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ou encore $f(x)>-\ln x$.
  De plus, $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0}(-\ln x)=+\infty$ donc par comparaison, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

IX Dérivée de la fonction $\ln u(x)$

Propriété

Soit une fonction $u(x)$ définie, dérivable et strictement positive sur un intervalle I. Alors la fonction $f(x)=\ln(u(x))$ est définie et dérivable sur I et

$$f'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Démonstration : Propriété à démontrer : « Si $f(x)=\ln(u(x))$ alors $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ »

On utilise la formule des fonctions composées :

$$(\ln(u(x)))'=u'(x)\times\ln'(u(x))=u'(x)\times\frac{1}{u(x)}=\frac{u'(x)}{u(x)}$$

Exemple :
Calculer la dérivée d'une fonction du type $\ln u$]

Pour dériver une fonction du type $\ln u$ sur un intervalle I, on s'assure que la fonction u est dérivable et strictement positive sur l'intervalle I.
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln(x^2+3)$. Calculons $f'(x)$.
Posons $u(x)=x^2+3$. u est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ et $u'(x)=2x$.
Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}=\dfrac{2x}{x^2+3}$.

X Fonction logarithme décimale (hors-programme)

Cette partie, bien que hors programme, peut avoir un intérêt en Physique-Chimie, ainsi qu'en Sciences de la Vie et de la Terre.

Définition

La fonction logarithme décimal, notée log, est la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$, par :

$$\log x = \frac{\ln x}{\ln 10}.$$

Propriété

1. Pour tout entier relatif n, $\log(10^n) = n$.
2. La fonction log est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.
3. Pour tous les réels $a > 0$ et $b > 0$,

$$\log(ab) = \log a + \log b \text{ et } \log\left(\frac{a}{b}\right) = \log a - \log b.$$

Démonstration :
On utilise les propriétés de ln.

Remarque Les logarithmes décimaux trouvent toute leur utilité en chimie (calcul de pH), en acoustique (mesure du son), en sismologie (magnitude d'un séisme), en astronomie (magnitude apparente d'un astre)… Il est bien adapté aux puissances de 10 puisque $\log\left(10^n\right) = n$ donc à la notation scientifique.