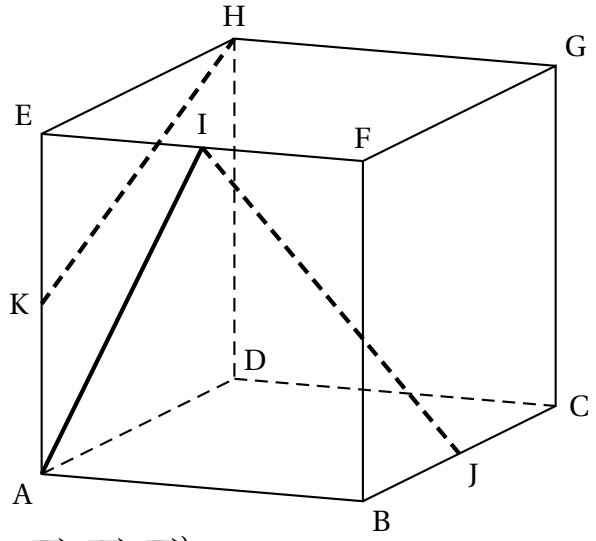
Spécialité : devoir sur feuille n° 3

I Amérique du Nord juin 2021



En prenant le repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$ on a :
A(0 ; 0 ; 0), B(0 ; 0 ; 0), C(1 ; 1 ; 0), D(0 ; 1 ; 0)

E(0 ; 0 ; 1) ; F(1 ; 0 ; 1), G(1 ; 1 ; 1), H(0 ; 1 ; 1), $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\,;\,1\right)$, $J\left(1\,;\,\frac{1}{2}\,;\,0\right)$, $K\left(0\,;\,0\,;\,\frac{1}{2}\right)$

1. **Méthode 1** : K et H appartiennent au plan (AEH) donc la droite (KH) est incluse dans ce plan.
   A et I appartiennent au plan (ABE) donc la droite (AI) est incluse dans ce plan.
   Les deux plans (AEH) et (ABE) sont sécants. selon la droite (AE) donc non parallèles.
   Les deux droites (AI) et (HK) ne sont donc pas parallèles car A appartient aux deux plans(et non coplanaires).

   Méthode 2 (pas attendue puisque le repère est introduit après cette question) :
   On a $\boxed{\overrightarrow{AI}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\1\end{pmatrix}}$ et $\boxed{\overrightarrow{KH}\begin{pmatrix}0\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}}$:
   ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites (AI) et (KH) ne sont pas parallèles.
2. (a) Voir plus haut pour les coordonnées de I et J.

   (b) On a $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\-1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

   On a $\boxed{2\overrightarrow{IJ}+2\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AC}}$.
   Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est donc une combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AE}$ qui ne sont pas colinéaires : ces trois vecteurs sont donc coplanaires.
3. d_1 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$: ces vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les droites d_1 et d_2 ne sont pas parallèles

4. Le plan a pour vecteur normal le vecteur $\overrightarrow{p}\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ et d_2 a pour vecteur directeur $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$.

   Or $\overrightarrow{p}\cdot\overrightarrow{u_2} = 1+3-4 = 0$: les vecteurs sont orthogonaux donc la droite d_2 est parallèle au plan $\mathscr{P}$.

5. **Méthode 1**

   Soit Δ la perpendiculaire à $\mathscr{P}$ contenant M. Cette droite a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{p}$, donc une équation paramétrique de Δ est :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5+1t \\ y &=& 3+3t \\ z &=& 1-2t \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}.$$

   Le projeté L, de M sur le plan $\mathscr{P}$ a ses coordonnées qui vérifient les quatre équations :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5+1t \\ y &=& 3+3t \\ z &=& 1-2t \\ x+3y-2z+2 &=& 0 \end{array}\right. ,t\in\mathbb{R}. \Rightarrow 5+t+3(3+3t)-2(1-2t)+2=0$$

   $\iff 5+t+9+9t-2+4t+2=0 \iff 14t+14=0 \iff t+1=0 \iff \boxed{t=-1}$.

   En reportant dans les trois premières équations du système, on trouve les coordonnées de L projeté orthogonal de M sur $\mathscr{P}$:

   $$\left\{\begin{array}{lcl} x &=& 5-1 \\ y &=& 3+3\times(-1) \\ z &=& 1-2\times(-1) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& 4 \\ y &=& 0 \\ z &=& 3 \end{array}\right.$$

   Donc le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$ est le le point $\boxed{L(4\,;\,0\,;\,3)}$.

   Méthode 2

   On a $\overrightarrow{\mathrm{ML}}\begin{pmatrix}-1\\-3\\2\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{\mathrm{ML}} = -\overrightarrow{p}$ est un vecteur normal au plan $\mathscr{P}$.

   D'autre part $\mathrm{L}(4\,;0\,;3)\in\mathscr{P} \iff 4+3\times0-2\times3+2 = 6-6 = 0$ est vraie, donc L est le projeté orthogonal de M sur le plan $\mathscr{P}$.

II Antilles-Guyane juin 2013 (extrait)

Partie A

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x = +\infty$, donc, par opérations $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$.

   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x) = x\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^x$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$ (croissances comparées) et $\lim\limits_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x = 0$, donc, par opérations $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0}$.

2. Pour tout réel x, $f'(x) = 1\mathrm{e}^x + (x+1)\mathrm{e}^x = \boxed{(x+2)\mathrm{e}^x}$.

3. Pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $f'(x)$ a le même signe que $x+2$.

   On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-1/\mathrm{e}^2$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B

1. (a) On a, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} g_m(x) = 0 &\iff x+1 = m\mathrm{e}^x \\ &\iff (x+1)\mathrm{e}^x = m \\ &\iff f(x) = m. \end{aligned}$$

   (b) D'après l'équivalence et le tableau de variations précédents :
   - Si $m \geqslant 0$, l'équation f(x) = m possède une unique solution
   - Si $m \in \left]-\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}\ ;\ 0\right[$, l'équation possède deux solutions
   - Si $m = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$, l'équation possède une solution
   - Si $m < -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$, l'équation ne possède pas de solution

2. — La courbe 1 ne coupe pas l'axe des abscisses, donc l'équation $g_m(x) = 0$ n'a pas de solution et cela entraîne que $m < -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$. La seule possibilité est donc que $m = -\mathrm{e}$.
   — La courbe 2 coupe l'axe des abscisses une seule fois, donc $m = -\dfrac{1}{\mathrm{e}^2}$ ou $m \geqslant 0$. La seule possibilité est donc $m = 0$.
   — Par élimination, la courbe 3 correspond à $m = \mathrm{e}$.

3. Pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = -m\mathrm{e}^x$ qui est du signe de $-m$; on en déduit :
   - si $m > 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est en dessous de $\mathscr{D}$;
   - si $m < 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) < 0$, donc $\mathscr{C}_m$ est au dessus de $\mathscr{D}$;
   - si $m = 0$, alors pour tout réel x, $g_m(x) - (x+1) = 00$, donc $\mathscr{C}_m$ et $\mathscr{D}$ sont confondues.

III Polynésie juin 2018

Un lapin se déplace dans un terrier composé de trois galeries, notées A, B et C, dans chacune desquelles il est confronté à un stimulus particulier. À chaque fois qu'il est soumis à un stimulus, le lapin reste dans la galerie où il se trouve ou change de galerie. Cela constitue une étape.

Soit n un entier naturel.
On note a_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie A à l'étape n ».
On note b_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie B à l'étape n ».
On note c_n la probabilité de l'évènement : « le lapin est dans la galerie C à l'étape n ».
À l'étape $n = 0$, le lapin est dans la galerie A.

Une étude antérieure des réactions du lapin face aux différents stimuli permet de modéliser ses déplacements par le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{lcl} a_{n+1} &=& \dfrac{1}{3}a_n + \dfrac{1}{4}b_n \\ b_{n+1} &=& \dfrac{2}{3}a_n + \dfrac{1}{2}b_n + \dfrac{2}{3}c_n \\ c_{n+1} &=& \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{3}c_n \end{array}\right.$$

Partie A

À l'aide d'un tableur, on obtient le tableau de valeurs suivant :

	A	B	C	D
1	n	a_n	b_n	c_n
2	0	1	0	0
3	1	0,333	0,667	0
4	2	0,278	0,556	0,167
5	3	0,231	0,574	0,194
6	4	0,221	0,571	0,208
7	5	0,216	0,572	0,212
8	6	0,215	0,571	0,214
9	7	0,215	0,571	0,214
10	8	0,214	0,571	0,214
11	9	0,214	0,571	0,214
12	10	0,214	0,571	0,214

1. La colonne C donne les différentes valeurs de b_n. Comme pour tout n, $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n$, la formule à entrer dans la cellule C3 et à recopier vers le bas est :

$$\boxed{= 2/3 * \text{B2} + 1/2 * \text{C2} + 2/3 * \text{D2}}$$

2. D'après ce tableau, on peut dire que
   - la probabilité que le lapin se retrouve à long terme dans la galerie A est $0,214$;
   - la probabilité que le lapin se retrouve à long terme dans la galerie B est $0,571$;
   - la probabilité que le lapin se retrouve à long terme dans la galerie C est $0,214$.

Partie B

1. On définit la suite (u_n), pour tout entier naturel n, par $u_n = a_n - c_n$.

   (a) Pour tout n, $u_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1} = \left(\frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n\right) - \left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{3}c_n\right) = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{4}b_n - \frac{1}{3}c_n$

   $= \frac{1}{3}(a_n - c_n) = \frac{1}{3}u_n$ donc $\boxed{u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n}$.

   $u_0 = a_0 - c_0 = 1 - 0 = 1$

   Donc la suite (u_n) est **géométrique** de raison $\boxed{q = \frac{1}{3}}$ et de premier terme $u_0 = 1$.

   (b) On déduit de la question précédente que, pour tout n, $u_n = u_0 \times q^n = 1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

2. On définit la suite (v_n) par $v_n = b_n - \frac{4}{7}$ pour tout entier naturel n ; donc $b_n = v_n + \frac{4}{7}$.

   (a) Les nombres a_n, b_n et c_n représentent à l'étape n, les probabilités que le lapin se trouve respectivement dans la galerie A, dans la galerie B ou dans la galerie C. Il n'y a pas d'autre possibilité pour le lapin donc la somme de ces trois probabilités doit être égale à la probabilité de l'événement certain, c'est-à-dire 1 : pour tout n, $\boxed{a_n + b_n + c_n = 1}$.

   On en déduit que $a_n + c_n = 1 - b_n$.

$$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{2}b_n + \frac{2}{3}c_n = \frac{2}{3}\left(a_n + c_n\right) + \frac{1}{2}b_n = \frac{2}{3}\left(1 - b_n\right) + \frac{1}{2}b_n = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}b_n + \frac{1}{2}b_n = \boxed{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}b_n}.$$

$$v_{n+1} = b_{n+1} - \frac{4}{7} = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}b_n\right) - \frac{4}{7} = \left(\frac{2}{3} - \frac{4}{7}\right) - \frac{1}{6}\left(v_n + \frac{4}{7}\right) = \frac{2}{21} - \frac{1}{6}v_n - \frac{2}{21} = \boxed{-\frac{1}{6}v_n}$$

(b) D'après la question précédente, on peut dire que la suite (v_n) est **géométrique** de raison $q = -\frac{1}{6}$ et de premier terme $v_0 = b_0 - \frac{4}{7} = 0 - \frac{4}{7} = -\frac{4}{7}$.

On en déduit que pour tout n, $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-\frac{4}{7} \times \left(-\frac{1}{6}\right)^n}$.

3. On a vu que, pour tout n, $b_n = v_n + \frac{4}{7}$ et que $v_n = -\frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$. On en déduit que $\boxed{b_n = \frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n}$.

On a vu précédemment que $a_n + c_n = 1 - b_n$.

On en déduit que $a_n + c_n = 1 - \left(\frac{4}{7} - \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\right) = 1 - \frac{4}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n = \boxed{\frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n}$.

On a vu aussi que, pour tout n, $u_n = a_n - c_n$ et que $u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$; on en déduit que $a_n - c_n = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$.

On résout le système :

$$\begin{cases} a_n + c_n &= \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ a_n - c_n &= \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases} \iff \begin{cases} 2a_n &= \frac{3}{7} + \frac{4}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ c_n &= a_n - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a_n &= \frac{3}{14} + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ c_n &= \left(\frac{3}{14} + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) - \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{cases} \iff \begin{cases} a_n &= \frac{3}{14} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \\ c_n &= \frac{3}{14} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{2}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n \end{cases}$$

4. La position du lapin après un très grand nombre d'étapes est donnée par les limites de a_n, b_n et c_n quand n tend vers l'infini.

$-1 < \frac{1}{3} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$; $-1 < -\frac{1}{6} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\frac{1}{6}\right)^n = 0$.

On en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} a_n = \frac{3}{14}$, $\lim\limits_{n \to +\infty} b_n = \frac{4}{7}$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} c_n = \frac{3}{14}$.

La probabilité qu'après un très grand nombre d'étapes, le lapin

- se trouve dans la galerie A tend vers $\frac{3}{14}$;
- se trouve dans la galerie B tend vers $\frac{4}{7}$;
- se trouve dans la galerie C tend vers $\frac{3}{14}$.

IV

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{3x^2+15x-10}{3x^2}$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.. On admet que f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

1. (a) Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{3x^2+15x-10}{x^2}$ donc $f'(x) = \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{(6x+15)\,x^2 - 2x\left(3x^2+15x-10\right)}{x^4}\right]$
$= \dfrac{1}{3}\left[\dfrac{-15x^2+20x}{x^4}\right] = \boxed{\dfrac{-15x+20}{3x^3}}$.

   (b) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow -15x+20 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{20}{15} = \dfrac{4}{3}$.
$-15x+20 < 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{4}{3}$.
On en déduit le tableau de signes et le tableau de variation. de f :

x	$-\infty$		0		$\frac{4}{3}$		$+\infty$
$-15x+20$		$+$	‖	$+$	0	$-$	
$3x^3$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	‖	$+$		$-$	
$f(x)$		↘	‖	↗	$\frac{23}{8}$	↘	

2. (a) $f'(x) = -\dfrac{5}{3} \times \dfrac{3x-4}{x^3}$ donc $f''(x) = -\dfrac{5}{3} \times \left[\dfrac{3x^3-3x^2(3x-4)}{x^6}\right] = -\dfrac{5}{3}\left[\dfrac{-6x^3+12x^2}{x^6}\right] = -\dfrac{5}{3} \times \dfrac{-6x+12}{x^4}$
$= \boxed{\dfrac{10x-20}{x^4}}$

   (b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ et $f''(x)$ est du signe de $10x-20 = 10(x-2)$ car $x^4 > 0$.
$f''(x) < 0$ sur $]0\,;\,2[$ et $f''(x) > 0$ sur $]2\,;\,+\infty[$.

   (c) f est donc concave sur $]0\,;\,2]$ et convexe sur $[2\,;\,+\infty[$, donc le point d'abscisse 2 est un pont d'inflexion.