Exercices sur la fonction ln

Exercice I Sujet bac 1 (2021)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Démontrer que, pour tout nombre réel $x > 0$, on a :

   $$f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}.$$

3. (a) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.

   On y fera figurer les valeurs exactes des extremums et les limites de f en 0 et en $+\infty$.

   On admettra que $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$.

   (b) Par simple lecture du tableau de variations, préciser le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \frac{5}{3}$.

4. Étudier la convexité de la fonction f c'est-à-dire préciser les parties de l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ sur lesquelles f est convexe, et celles sur lesquelles f est concave.

   On justifiera que la courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion, dont on précisera les coordonnées.

Exercice II Amérique du Nord mai 2019

Partie A : établir une inégalité

Sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on définit la fonction f par $f(x) = x - \ln(x+1)$.

1. Étudier le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. En déduire que pour tout $x \in [0\,;\,+\infty[$, $\quad \ln(x+1) \leqslant x$.

Partie B : application à l'étude d'une suite

On pose $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = u_n - \ln(1+u_n)$. On admet que la suite de terme général u_n est bien définie.

1. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de u_2.
2. (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \geqslant 0$.

   (b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante, et en déduire que pour tout entier naturel n, $\quad u_n \leqslant 1$.

   (c) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

3. On note ℓ la limite de la suite (u_n) et on admet que $\ell = f(\ell)$, où f est la fonction définie dans la **partie A**.

   En déduire la valeur de ℓ.

4. (a) Écrire un algorithme qui, pour un entier naturel p donné, permet de déterminer le plus petit rang N à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-p}.

   (b) Déterminer le plus petit entier naturel n à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}. [1]

Exercice III Liban mai 2019

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par

   $$f(x) = x(1 - \ln x)^2.$$

   (a) Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0\,;\,1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.

   (b) Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

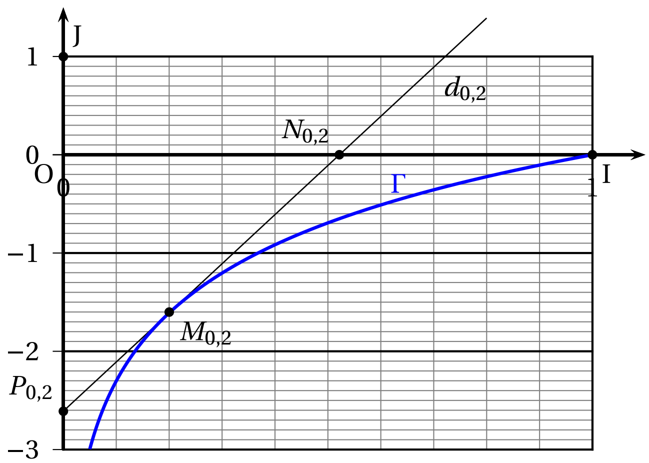
On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0\,;\,1]$ par $g(x) = \ln x$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0\,;\,1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a. Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a.

On s'intéresse à l'aire du triangle $\text{O}N_aP_a$ quand le réel a varie dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

1. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0{,}2$ et on donne la figure ci-dessous.

1. La plupart des calculatrices et même des tableurs sont incapables de traiter cette question donnant même des résultats faux. Elle peut être sautée.



(a) Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.

(b) Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.

(c) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle O$N_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0\,;\,1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathscr{A}(a) = \dfrac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

2. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

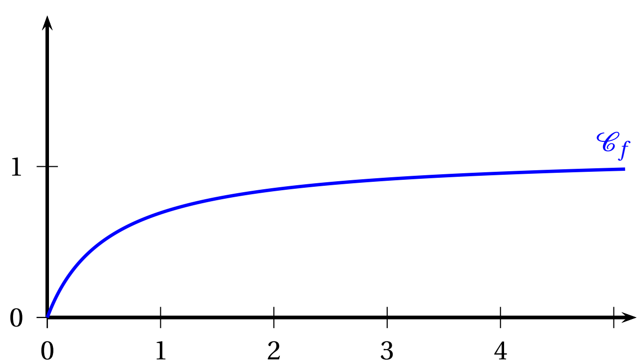
Exercice IV Nouvelle Calédonie novembre 2019

On considère la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = \ln\left(\frac{3x+1}{x+1}\right).$$

On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthogonal.



Partie A

1. Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.

2. (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x positif ou nul,

$$f'(x) = \frac{2}{(x+1)(3x+1)}$$

(b) En déduire que la fonction f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par

$u_0 = 3$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
2. Démontrer que la suite (u_n) converge vers une limite strictement positive.

Partie C

On note ℓ la limite de la suite (u_n). On admet que $f(\ell) = \ell$.

L'objectif de cette partie est de déterminer une valeur approchée de ℓ.

On introduit pour cela la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = f(x) - x$.

On donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction g sur $[0\,;\,+\infty[$ où $x_0 = \dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} \approx 0,215$ et $g(x_0) \approx 0,088$, en arrondissant à 10^{-3}.

x	0	x_0	$+\infty$
Variations de la fonction g	0 ↗	$g(x_0)$	↘ $-\infty$

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive. On la note α.

2. (a) Recopier et compléter l'algorithme ci-contre afin que la dernière valeur prise par la variable x soit une valeur approchée de α par excès à 0,01 près.

(b) Donner alors la dernière valeur prise par la variable x lors de l'exécution de l'algorithme.

```
x ← 0,22
Tant que
.........faire
    x ← x + 0,01
Fin de Tant que
```

3. En déduire une valeur approchée à 0,01 près de la limite ℓ de la suite (u_n).