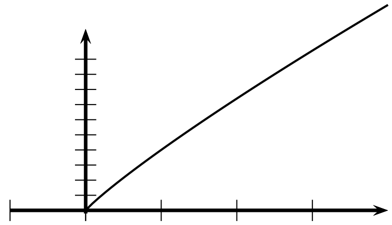
Exercices sur la fonction ln

I

La fonction f est définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = 4x - x\ln x$$

. Mila a obtenu sur ca calculatrice une partie de la courbe représentative, représentée ci-dessous.



Elle émet la conjecture suivante : « Il semble que la fonction soit toujours positive. »

a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$.

b) Étudier le signe de $f(x)$.

c) Pour pourquoi Mila pensait-elle cela ?

II

Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2\ln(x).$$

a) Déterminer la limite de f en 0, puis en $+\infty$.

b) Déterminer la fonction. dérivée de f.

c) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

d) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0~;~+\infty[$.

e) Déterminer une valeur approchée de α au centième.

III

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x^2-5x} + 1\right).$$

a) Déterminer la fonction dérivée g' de g.

b) Étudier les variations de g.

IV Amérique du Nord mai 2012

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On rappelle que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}.$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O~;~\vec{i}~;~\vec{j}\right)$.

1. Soit g la fonction définie sur $[1~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x).$$

Montrer que la fonction g est positive sur $[1~;~+\infty[$.

2. (a) Montrer que, pour tout x de $[1~;~+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   (b) En déduire le sens de variation de f sur $[1~;~+\infty[$.

   (c) Montrer que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$.

   (d) Étudier la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la droite $\mathscr{D}$.

3. Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$.

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

   (b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

V Amérique du Nord mai 2018

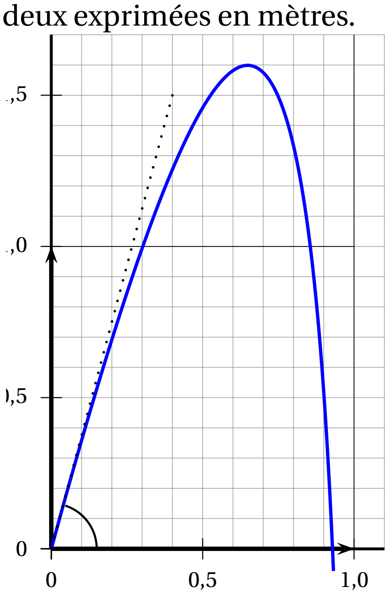
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1-x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0\,;\,1[$. On note f' sa fonction dérivée.
   - Montrer que , pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;\,1[$:
   $$f'(x) = \frac{-bx+b-2}{1-x}.$$
   - En déduire que la fonction f possède un maximum sur l'intervalle $[0\,;\,1[$.
   - Montrer que le maximum de la fonction f est égal à $b-2+2\ln\left(\frac{2}{b}\right)$.
2. Déterminer pour quelles valeurs du paramètre b la hauteur maximale du projectile ne dépasse pas $1,6$ mètre.
3. Dans cette question, on choisit $b = 5,69$.

   L'angle de tir θ correspond à l'angle entre l'axe des abscisses et la tangente à la courbe de la fonction f au point d'abscisse 0 comme indiqué sur le schéma donné ci-dessus.

   Déterminer une valeur approchée au dixième de degré près de l'angle θ.

VI Constante d'Euler

l'objectif est de montrer que les suites (u_n) et (v_n), définies pourtout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

convergent vers une limite commune γ appelée constante d'Euler.

1. (a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :
   $$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$
   (b) Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par :
   $$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$
   Déterminer la limite de f en $+\infty$, étudier son sens de variation sur $[1\,;\,+\infty[$ et en déduire son signe sur $[1\,;\,+\infty[$.
2. (a) Démontrer que, pout tout entier naturel n non nul :
   $$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right).$$
   (b) Quel est le sens de variation de la suite (v_n) ?
3. (a) Justifier que, pour tout n non nul, $v_n \leqslant u_n$.
   (b) En déduire que la suite (u_n) est minorée, que la suite (v_n) est majorée, que ces deux suites convergent et qu'elles ont la même limite.
   Cette limite commune est appelée constante d'Euler est notée γ.
4. Déterminer une valeur approchée de γ à 10^{-2} près.