Contrôle sur la fonction ln

I — 1,5 points

Simplifier les expressions suivantes :

a) $\ln\left(\sqrt{\mathrm{e}}\right)$

b) $\ln\left(\frac{1}{3}\right)+\ln\left(\frac{3}{5}\right)+\ln\left(\frac{5}{7}\right)+\ln\left(\frac{7}{9}\right)$

II — 3 points

a) Exprimer en fonction de $\ln 2$ les nombres suivants :

$A=\ln 8 \qquad B=\ln\frac{1}{16} \qquad C=\ln\sqrt{8}$

b) Exprimer en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$ les réels suivants :

$A=\ln 24 \qquad B=\ln\frac{8}{9}$

III — 3 points

Résoudre les équations suivantes :

a) $\ln(3x)=7$

b) $\ln\left(x^2-1\right)=\ln 2+\ln 4$

IV — 3,5 points

On considère l'inéquation

$$\ln(5-x)-\ln 3+\ln(x-1)\geqslant 0.$$

1. Trouver l'ensemble de définition $\mathscr{D}$.
2. Résoudre alors cette inéquation.

V — 2,5 points

Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur les ensembles indiqués :

a) $f(x)=x\ln(x)-x$ sur $\mathscr{D}=]0\,;\,+\infty[$.

b) $g(x)=\dfrac{x+\ln x}{x^2}$ sur $\mathscr{D}=]0\,;\,+\infty[$

VI — 6,5 points

On considère la fonction f définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\mathrm{e}^x-\ln x.$$

On appelle $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative.

1. (a) Étudier les variations de la fonction g définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par : $g(x)=x\mathrm{e}^x-1$.
   (b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.
   (c) Montrer que l'équation $x\mathrm{e}^x=1$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}^+$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-3}.
   (d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.
2. (a) Déterminer la limite de f en 0.
   (b) Montrer que $f(x)$ peut se mettre sous la forme $f(x)=\mathrm{e}^x\left(1-\frac{x}{\mathrm{e}^x}\times\frac{\ln x}{x}\right)$.
   En déduire la limte de $f(x)$ en$+\infty$.
   (c) Déterminer f' et montrer que $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x}$.
   (d) En déduire les variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$ puis dresser son tableau de variation.
   (e) Montrer que f admet un minimum $m=f(\alpha)$ et que $m=\alpha+\dfrac{1}{\alpha}$.
   Justifier que : $2{,}32\leqslant m\leqslant 2{,}34$.
3. Donner une équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
4. Sur la courbe ci-dessous, tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et la tangente T.
5. **Question faculative (1 point)**
   Étudier la convexité de f sur $]0\,;\,+\infty[$; en déduire la position de $\mathscr{C}_f$ par rapport à la tangente T.