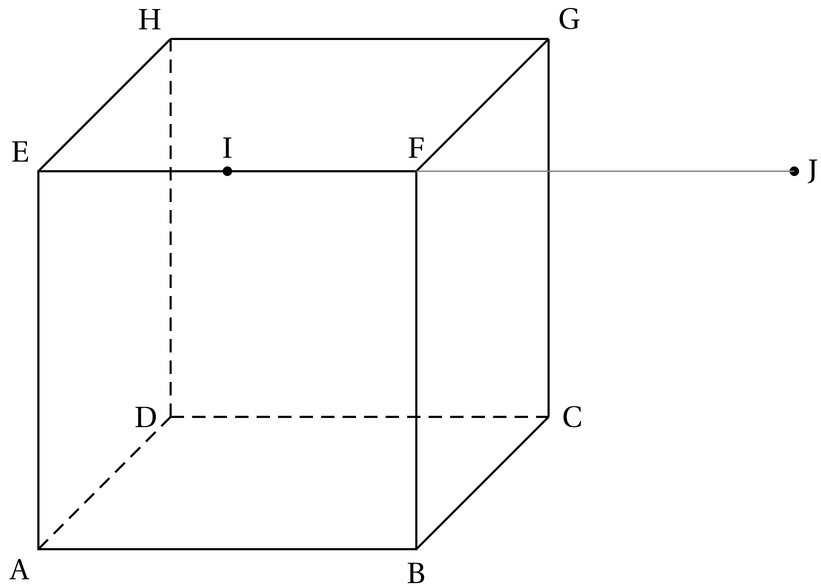
Correction des exercices de bacclauréat

I Sujet 0

On considère le cube ABCDEFGH de côté 1, le milieu I de [EF] et J le symétrique de E par rapport à F.



Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AD},\,\overrightarrow{AE}\right)$.

Les sommets du cube ont pour coordonnées : A(0 ; 0 ; 0) ; B(1 ; 0 ; 0), D(0 ; 1 ; 0), E(0 ; 0 ; 1), C(1 ; 1 ; 0), F(1 ; 0 ; 1), H(0 ; 1 ; 1) et G(1 ; 1 ; 1).

1. (a)
   - Le point I est le milieu de [EF] donc I a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   - Le point J est le symétrique de E par rapport à F, donc J a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (b) On en déduit les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{BI}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BG}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c)
   - Les vecteurs $\overrightarrow{BI}$ et $\overrightarrow{BG}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (BGI).
   - $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BI} = -1+0+1 = 0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BI}$.
   - $\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BG} = 0-1+1 = 0$ donc $\overrightarrow{DJ}\perp\overrightarrow{BG}$.

   Donc le vecteur $\overrightarrow{DJ}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGI), donc il est normal au plan (BGI).

   (d)
   - Le vecteur $\overrightarrow{DJ}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (BGI) donc le plan (BGI) a une équation de la forme $2x - y + z + d = 0$.

- Le point B appartient au plan (BGI) donc les coordonnées de B vérifient l'équation du plan ; donc $2x_B - y_B + z_B + d = 0$, ce qui équivaut à $2-0+0+d=0$, ce qui veut dire que $d=-2$.

Donc une équation cartésienne du plan (BGI) est $2x-y+z-2=0$.

2. On note d la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).

(a) La droite d est orthogonale au plan (BGI), et $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BGI), donc $\overrightarrow{DJ}$ est un vecteur directeur de la droite d.

Le point F appartient à la droite d donc la droite d est l'ensemble des points M de coordonnées $(x\,;\,y\,;\,z)$ tels que $\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ soient colinéaires.

$\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{DJ}$ colinéaires $\iff \overrightarrow{FM} = t.\overrightarrow{DJ} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x-1 &=& t\times 2\\ y-0 &=& t\times(-1)\\ z-1 &=& t\times 1\end{array}\right.$

Donc la droite d a pour équation $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1+2t\\ y &=& \quad -t\\ z &=& 1+\ \ t\end{array}\right.$, $t\in\mathbb{R}$

(b) On considère le point L de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.

- Pour prouver que $\text{L}\in d$, on cherche t pour que $\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{2}{3} &=& 1+2t\\ \dfrac{1}{6} &=& \quad -t\\ \dfrac{5}{6} &=& 1+\ \ t\end{array}\right.$

  On trouve $t=-\dfrac{1}{6}$ donc $\text{L}\in d$.

- Le plan (BGI) a pour équation $2x-y+z-2=0$; or $2x_L - y_L + z_L - 2 = \dfrac{4}{3}-\dfrac{1}{6}+\dfrac{5}{6}-2=0$, donc $\text{L}\in$ (BGI).

Le point L est donc le point d'intersection de la droite d et du plan (BGI).

3. (a) La pyramide FBGI a pour base le triangle rectangle FBG, et pour hauteur IF.

- $\text{IF} = \dfrac{1}{2}$
- Le triangle rectangle FBG a pour aire $\dfrac{\text{FG}\times\text{FB}}{2} = \dfrac{1}{2}$.

Le volume de la pyramide FBGI est donc $\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{12}$.

(b) La droite d est orthogonale au plan (BGI) et coupe ce plan en L. Le point F appartient à la droite d, donc on peut dire que la distance FL est la distance du point F au plan (BGI), autrement dit c'est la hauteur de la pyramide FBGI dont le triangle BGI est la base.

$\text{FL}^2 = \left(\dfrac{2}{3}-1\right)^2 + \left(\dfrac{1}{6}-0\right)^2 + \left(\dfrac{5}{6}-1\right)^2 = \dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{36}+\dfrac{1}{36} = \dfrac{6}{36} = \dfrac{1}{6}$ donc $\text{FL} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}$

On appelle $\mathscr{A}$ l'aire du triangle BGI. On exprime le volume de la pyramide FBGI :

$\mathcal{V} = \dfrac{1}{3}\times\text{FL}\times\mathscr{A} \iff \dfrac{1}{12} = \dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{\sqrt{6}}\times\mathscr{A} \iff \dfrac{3\times\sqrt{6}}{12} = \mathscr{A} \iff \mathscr{A} = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$

L'aire du triangle BGI est égale à $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

II Antilles septembre 2020

On se place dans le repère $\left(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. H(0 ; 1 ; 1) , M(0,5 ; 0 ; 0) et N(1 ; 0,5 ; 0).
2. (a) La droite (MN) est définie par le point M et le vecteur $\overrightarrow{MN}$.

   M(0,5 ; 0 ; 0) et $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$

   Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & 0,5+0,5k \\ y & = & 0,5k \\ z & = & 0 \end{array}\right., k \in \mathbb{R}.$$

   (b) Une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = & t \\ y & = & 1 \\ z & = & 0 \end{array}\right., t \in \mathbb{R}.$$

   K étant le point d'intersection des droites (CD) et (MN), ses coordonnées sont solutions du système suivant :

$$\left\{\begin{array}{l} x=t \\ y=1 \\ z=0 \\ x=0,5+0,5k \\ y=0,5k \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1=0,5k \\ t=0,5+0,5k \\ x=t \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} k=2 \\ t=1,5 \\ x=1,5 \\ y=1 \\ z=0 \end{array}\right.$$

   C'est pourquoi K (1,5 ; 1 ; 0)

3. (a) $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix}0,5\\-1\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{HN}\begin{pmatrix}1\\-0,5\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{HM}$ et $\overrightarrow{HN}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{1}{0,5} \neq \dfrac{-0,5}{-1}$

   $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{HM} = 2 \times 0,5 - 2 \times (-1) + 3 \times (-1) = 1 + 2 - 3 = 0$
   $\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{HN} = 2 \times 1 - 2 \times (-0,5) + 3 \times (-1) = 2 + 1 - 3 = 0$
   Le vecteur $\overrightarrow{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (HMN),c'est donc un vecteur normal à ce plan.

   (b) $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}2\\-2\\3\end{pmatrix}$ étant un vecteur normal du plan (HMN),

   une équation cartésienne de ce plan est $2x - 2y + 3z + d = 0$, H(0 ; 1 ; 1) appartient à ce plan donc ses coordonnées vérifient l'équation, on a donc $2 \times 0 - 2 \times 1 + 3 \times 1 + d = 0$ soit $d = -1$
   Une équation du plan (HMN) est donc $2x - 2y + 3z - 1 = 0$

(c) Déterminons une représentation paramétrique de la droite (CG). Cette droite est déterminée par le point C(1 ; 1 ; 0) et $\overrightarrow{CG}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Une représentation paramétrique de la droite (MN) est donc :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1\\ y &=& 1\\ z &=& p\end{array}\right., p \in \mathbb{R}.$$

L est le point d'intersection de la droite (CG) et du plan (HMN), ses coordonnées sont donc solutions du système suivant :

$$\begin{cases}2x-2y+3z-1=0\\ x=1\\ y=1\\ z=p\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2-2+3p-1=0\\ x=1\\ y=1\\ z=p\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}p=\dfrac{1}{3}\\ x=1\\ y=1\\ z=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

C'est pourquoi L $(1 ; 1 ; \frac{1}{3})$

4. Sur la face (ABCD), on trace le segment [MN],
   sur la face (BCGF), on trace le segment [NL],
   sur la face (CDHG), on trace le segment [LH],
   Les faces (ABFE) et (CDHG) sont parallèles donc les droites d'intersection des ces deux plans avec le plan (HMN) sont parallèles. On trace la parallèle à (LH) passant par M, elle coupe la droite (AE) en un point S.
   Sur la face (ADHE), on trace le segment [SH],(on peut remarquer que (SH) est parallèle à (NL).
   La section du cube par le plan (HMN) est donc MNLHS.