Correction des exercices sur la fonction ln (feuille 2)

Exercice I Sujet bac 1 (2021)

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \dfrac{3}{x}$,
où ln désigne la fonction logarithme népérien.
On note $\mathscr{C}$ la représentation graphique de f dans un repère orthonormé.

1. On détermine la limite de la fonction f en $+\infty$.
$f(x) = x\left(1 - 4\dfrac{\ln(x)}{x}\right) + 4 - \dfrac{3}{x}$
$$\left.\begin{array}{r}\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \implies \lim_{x\to+\infty} x\left(1-4\frac{\ln(x)}{x}\right)+4 = +\infty \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x} = 0\end{array}\right\} \implies \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$
2. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
$f'(x) = 1 + 0 - \dfrac{4}{x} + \dfrac{3}{x^2} = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$
3. (a) On cherche le signe de $f'(x)$ sur $]0\,;\,+\infty[$:
$\boxed{x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3)}$

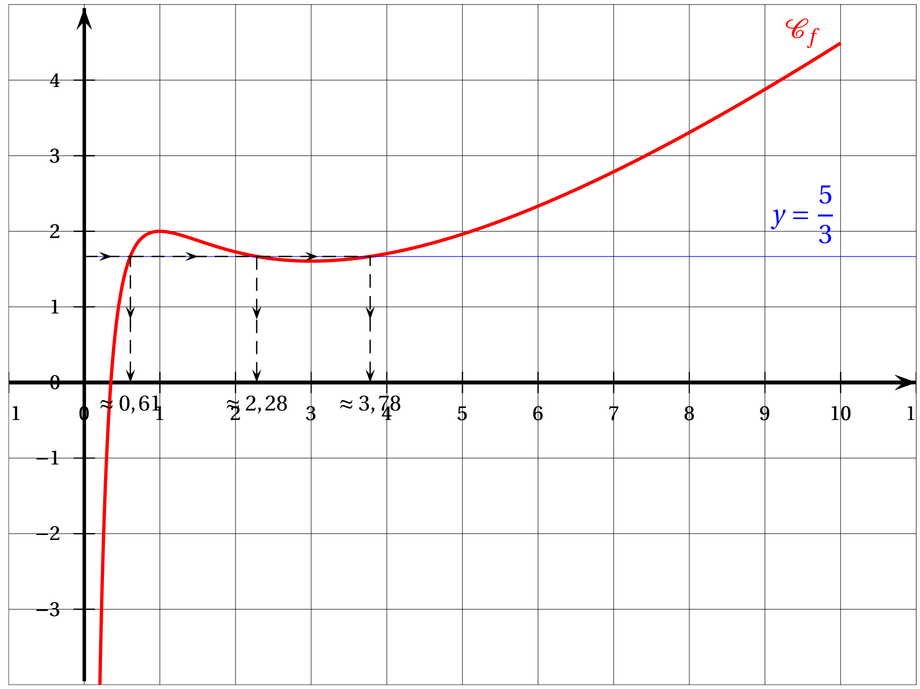
x	0		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2	||	$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(1) = 1 + 4 - 4\ln(1) - \dfrac{3}{1} = 2$; $f(3) = 3 + 4 - 4\ln(3) - \dfrac{3}{3} = 6 - 4\ln(3) \approx 1\boxed{,69}$
On établit le tableau des variations de f en admettant que que $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$:

x	0		1		3		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	|| $-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$6-4\ln 3 \approx 1,61$	$\nearrow$	$+\infty$

(b)
- $\dfrac{5}{3} \in]-\infty\,;\,2]$ donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.
- $\dfrac{5}{3} \approx 1,67$ et $f(3) = 6 - 4\ln 3 \approx 1,61$ donc $\dfrac{5}{3} \in [6-4\ln 3\,;\,2]$, donc l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une solution unique dans l'intervalle $]1\,;\,3[$.
- $\dfrac{5}{3} \in [6-4\ln 3\,;\,+\infty[$, donc $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet une unique solution dans l'intervalle $]0\,;\,1]$.

Conclusion : l'équation $f(x) = \dfrac{5}{3}$ admet donc trois solutions dans $]0\,;\,+\infty[$.
Voir ci-dessus les valeurs approchées des solutions.



4. Pour étudier la convexité de f, on détermine le signe de f'', la dérivée seconde de f.

   $f'(x) = \dfrac{x^2-4x+3}{x^2}$ donc

   $f''(x) = \dfrac{(2x-4)\times x^2-(x^2-4x+3)\times 2x}{x^4} = \dfrac{(2x^2-4x-2x^2+8x-6)\times x}{x^4} = \boxed{\dfrac{4x-6}{x^3} = \dfrac{2(x-3)}{x^3}}$

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2(x-3)$	||	$-$	0	$+$	
x^3	||	$+$	|	$+$	
$f''(x)$	||	$-$	0	$+$	
	||	f concave		f convexe	

   La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = \frac{3}{2}$ donc la courbe $\mathscr{C}_f$ admet un unique **point d'inflexion** d'abscisse $\frac{3}{2}$.

   $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}+4-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{\frac{3}{2}} = \frac{11}{2}-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)-2 = \frac{7}{2}-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

   La courbe $\mathscr{C}$ admet un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{7}{2}-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$.

Exercice II Amérique du Nord mai 2019

Partie A : établir une inégalité

1.

   f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$.

   $f = u-\ln(v) \;\Rightarrow\; f' = u'-\dfrac{v'}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = 1+x \end{cases} \;\Rightarrow\; \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = 1 \end{cases}$

   $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ f'(x) = 1-\dfrac{1}{1+x} = \boxed{\dfrac{x}{x+1}}$

   Sur $[0\,;\,+\infty[\,,\ \dfrac{x}{x+1} \geqslant 0$. On en déduit que f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

2.

$\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ f(x) \geqslant f(0)$ car f est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$

$f(0) = 0$ d'où $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ x - \ln(1+x) \geqslant 0$

On a donc bien $\forall x \in [0\,;\,+\infty[\,,\ \boxed{\ln(1+x) \leqslant x}$

Partie B : application à l'étude d'une suite

1.

$u_1 = u_0 - \ln(1+u_0) = \boxed{1 - \ln(2)}$

$u_2 = u_1 - \ln(1+u_1) = \boxed{1 - \ln(2) - \ln(2 - \ln(2)) \approx 0{,}0392}$

2. (a) On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant 0$

Initialisation : $u_0 = 1 \geqslant 0$

Hérédité : Soit n un entier naturel tel que $u_n \geqslant 0$

alors $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant 0$ d'après la **partie A**

On en déduit que la propriété est héréditaire à partir du rang 0 or elle est vérifiée à ce même rang.

Par le principe de récurrence on peut donc conclure que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \geqslant 0$

(b)

$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_{n+1} - u_n = -\ln(1+u_n) \leqslant 0$ car $(1+u_n) \geqslant 1$.

On en déduit que (u_n) est **décroissante**.

(u_n) est donc majorée par $u_0 = 1$.

Finalement on a bien $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ u_n \leqslant 1$.

(c)

(u_n) est décroissante et minorée par 0 donc (u_n) **converge** vers $\ell \geqslant 0$.

3. f est continue donc la limite ℓ de la suite est solution de l'équation $f(x) = x$ donc $f(\ell) = \ell$.

$\ell = f(\ell) \iff \ln(1+\ell) = 0 \iff \boxed{\ell = 0}$

4. (a)

N ← 0
U ← 1
Tant que U $\geqslant 10^{-p}$
    U ← U − ln(1 + U)
    N ← N+1
Fin Tant que
Afficher N

(b)

En programmant l'algorithme, on trouve $n = 6$ comme le plus petit entier à partir duquel tous les termes de la suite (u_n) sont inférieurs à 10^{-15}

Exercice III Liban mai 2019

1. (a)

f est dérivable sur $]0\,;\,1]$ comme produit de fonctions dérivables sur $]0\,;\,1]$.

$$f = uv^2 \Rightarrow f' = u'v^2 + 2uv'v \text{ avec } \begin{cases} u(x) = x \\ v(x) = 1 - \ln(x) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v'(x) = -\dfrac{1}{x} \end{cases}$$

$$\forall x \in]0\,;\,1]\,,\ f'(x) = \left(1 - \ln(x)\right)^2 - 2\left(1 - \ln(x)\right) = (1 - \ln(x))\,(1 - \ln(x) - 2)$$

On a donc bien $\forall x \in]0\,;\,1]\,,\ f'(x) = \left(\ln(x) + 1\right)\left(\ln(x) - 1\right)$.

(b)

Sur $]0\,;\,1]$, $\ln(x)<0$ d'où $\left(\ln(x)-1\right)<0$

$f'(x)$ est donc du signe contraire de $\left(\ln(x)+1\right)$

$\ln(x)+1>0 \iff x>\mathrm{e}^{-1}$, on en déduit le tableau des variations de f

x	0		e^{-1}		1
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$	$4\mathrm{e}^{-1}$	$\searrow$	1

1. (a)

$\mathrm{O}N_{0,2}\approx 0,5$ et $\mathrm{O}P_{0,2}\approx 2,6$

On en déduit que l'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ est d'environ $\boxed{\dfrac{0,5\times 2,6}{2}=0,65}$ unités d'aire.

(b)

$\forall x\in]0\,;\,1]\, g'(x)=\dfrac{1}{x}$.

$d_{0,2}$ est de coefficient directeur $g'(0,2)=\dfrac{1}{0,2}=5$. On a donc $d_{0,2}\ :\ y=5x+b$

Or $d_{0,2}$ passe par $M_{0,2}\left(0,2\,;\,\ln(0,2)\right)$, on en déduit $b=\ln(0,2)-1=-1-\ln(5)$

Finalement $d_{0,2}\ :\ \boxed{y=5x-\ln(5)-1}$

(c)

$\mathrm{O}P_{0,2}=|\ln(0,2)-1|=1+\ln(5)$

$5x+\ln(0,2)-1=0 \iff x=\dfrac{1+\ln(5)}{5}$ donc $\mathrm{O}N_{0,2}=\dfrac{1+\ln(5)}{5}$

L'aire du triangle $\mathrm{O}N_{0,2}P_{0,2}$ est donc $\boxed{\dfrac{(1+\ln(5))^2}{10}\approx 0,681}$ unités d'aire.

2. $\mathscr{A}(a)$ est maximale. Déterminer cette aire maximale.

On remarque que $\mathscr{A}(a)=\dfrac{1}{2}f(a)$ donc l'aire sera maximale si $f(a)$ est maximale

On en déduit que l'aire est maximale si $a=\mathrm{e}^{-1}$ et on a $\mathscr{A}\left(\mathrm{e}^{-1}\right)=\dfrac{1}{2}f\left(\mathrm{e}^{-1}\right)=2\mathrm{e}^{-1}=\boxed{\dfrac{2}{\mathrm{e}}\approx 0,74}$ unités d'aire.

Exercice IV Nouvelle Calédonie novembre 2019

Partie A

1. Pour $x\neq 0$, on a $f(x)=\ln\left(\dfrac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right)$.

Comme $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}}=\frac{3}{1}=3$ et finalement : $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=\ln 3}$.

Ce résultat montre que géométriquement la droite d'équation $y=\ln 3$ est **asymptote horizontale** à $\mathscr{C}_f$ au voisinage de plus l'infini.

2. (a) f est la composée de fonctions dérivables sur $[0\,;\,+\infty[$ et sur cet intervalle :

$f'=\dfrac{u'}{u}$.

Avec $u(x)=\dfrac{3x+1}{x+1}$, on a $u'(x)=\dfrac{3(x+1)-1\times(3x+1)}{(x+1)^2}=\dfrac{3x+3-3x-1}{(x+1)^2}=\dfrac{2}{(x+1)^2}$.

Donc $f'(x)=\dfrac{\frac{2}{(x+1)^2}}{\frac{3x+1}{x+1}}=\boxed{\dfrac{2}{(3x+1)(x+1)}}$.

(b) $f'(x)$ quotient de nombres supérieurs à zéro est supérieure à zéro, donc f est **strictement croissante** sur $[0\,;\,+\infty]$ de $f(0) = \ln\frac{1}{1} = 0$ à $\ln 3$.

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\ln 3$

Partie B

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

   Initialisation : $u_0 = 3$ et $u_1 = \ln\left(\frac{9+1}{3+1}\right) = \ln\frac{10}{4} = \ln\frac{5}{2} \approx 0,92$.

   On a bien $\frac{1}{2} \leqslant u_1 \leqslant u_0$: l'encadrement est vrai au rang 0.

   Hérédité : on suppose que pour $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

   Par croissance (démontrée en **A. 2.**) de la fonction f, on a :

   $f\left(\frac{1}{2}\right) \leqslant f\left(u_{n+1}\right) \leqslant f\left(u_n\right)$.

   Or $f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{\frac{1}{2}+1}\right) = \left(\frac{5}{3}\right) \approx 0,51 > 0,5$.

   On a donc l'encadrement $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.

   L'encadrement est vrai au rang 0, et s'il est vrai à un rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque, il est vrai au rang $n+1$. D'après le principe de récurrence, on a donc démontré que pour tout entier naturel n, $\frac{1}{2} \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

2. Le résultat précédent montre que le suite (u_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$: elle **converge** donc vers une limite supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, donc positive.

Partie C

1. Le tableau de variations montre que sur l'intervalle $[x_0\,;\,+\infty[$, la fonction g décroit de $g\left(x_0\right) \approx 0,088 > 0$ à $-\infty$.
   Elle est continue sur cet intervalle car dérivable, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in [x_0\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   Comme $x_0 > 0$, $\alpha > 0$.

2.
   (a)
   ```
   x ← 0,22
   Tant que g(x) > 0 faire
           x ← x + 0,01
   Fin de Tant que
   ```
   (b) En faisant un tableau de valeurs, on trouve $x \approx 0,53$

3. On en déduit que $\boxed{\ell \approx 0,53}$