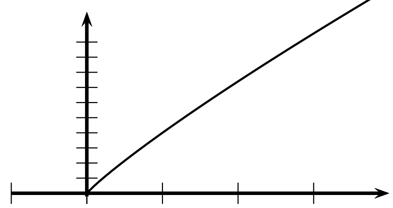
Correction des exercices sur la fonction ln

I

La fonction f est définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = 4x - x\ln x$$

. Mila a obtenu sur ca calculatrice une partie de la courbe représentative, représentée ci-dessous.



Elle émet la conjecture suivante : « Il semble que la fonction soit toujours positive. »

a) $f(x) = x(4-\ln(x)) = 0 \Leftrightarrow 4-\ln(x) = 0$ (car $x > 0$) $\Leftrightarrow \ln(x) = 4 \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^4$.
$\boxed{\mathscr{S} = \{\mathrm{e}^4\}}$.

b) $f(x) > 0 \Leftrightarrow 4-\ln(x) > 0$ (car $x > 0$) $\Leftrightarrow 4 > \ln(x) \Leftrightarrow \mathrm{e}^4 > x$.
On donne le signe de f(x) sous la forme d'un tableau de signes.

x	0		e^4		$+\infty$
$f(x)$	‖	$+$	0	$-$	

c) Mila pensait-elle cela car il n'apparaît qu'une partie de la courbe; en effet, $\mathrm{e}^4 \approx 54,6$ et la courbe n'est tracée que pour $x \leqslant 4$ environ.

II

Soit f la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 2\ln(x).$$

a)
- **Limite en 0** : $\lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$ et $\lim\limits_{x\to 0} \| nx = -\infty$ donc par multiplcation par 2 et par somme : $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty}$.
- **Limite en $+\infty$** : $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$ donc, par somme, $\boxed{\lim\limits_{x\to+/\infty} f(x) = +\infty}$

b) f est déivable comme somme de fonctions dérivables et, pour tout $x > 0$, $f'(x) = 2x + 2\times\dfrac{1}{x} = \boxed{2\left(x+\dfrac{1}{x}\right)}$.

c) Comme $x > 0$, x et $\dfrac{1}{x}$ sont strictement positifs, donc $f'(x) > 0$.
f est donc croissante :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

d) f est continue, $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution; celle-ci est unique car f est croissante. On la note α.

e) À la calculatrice, en effectuant un tableau de valeurs, on trouve $f(0,70) < 0$ et $f(0,71) > 0$ donc $\boxed{0,70 < \alpha < 0,71}$

III

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x^2-5x}+1\right).$$

a) $g = \ln(u)$ avec $u(x) = \mathrm{e}^{x^2-5x}+1$.

$g' = \dfrac{u'}{u}$; $u = \mathrm{e}^{v}+1$ avec $v(x) = x^2-5x$ donc $u' = v'\mathrm{e}^{v}$ d'où $v'(x) = (2x-5)\mathrm{e}^{x^2-5x}$.

On en déduit : $\boxed{g'(x) = \dfrac{(2x-5)\mathrm{e}^{x^2-5x}}{\mathrm{e}^{x^2-5x}+1}}$

b) $\mathrm{e}^{x^2-5x} > 0$ et $\mathrm{e}^{x^2-5x}+1>0$ donc $g'(x)$ est du signe de $2x-5$, qui s'annule en $\dfrac{5}{2}$ et est positif our $x \geqslant \dfrac{5}{2}$.

On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$=$	
$g(x)$		$\searrow$	$g\left(\frac{5}{2}\right)$	$\nearrow$	

IV Amérique du Nord mai 2012

Partie A : Restitution organisée des connaissances

On effectue un changement de variable, en possant $X = \ln(x)$; alors $x = \mathrm{e}^{X}$.
Lorsque x tend vers $+\infty$, X tend aussi vers $+\infty$.
Par conséquent : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \lim_{X\to+\infty} \frac{X}{\mathrm{e}^{X}} = \lim_{X\to+\infty} \frac{1}{\frac{\mathrm{e}^{X}}{X}} = 0$ d'après le rappel.

Partie B

1. Soit g la fonction définie sur $[1\ ;\ =\infty[]$ par $g(x) = x^2-1+\ln(x)$.
   g est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[]$ comme somme de fonctions dérivables.
   Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $g'(x) = 2x + \dfrac{1}{x} > 0$ (somme de nombres positifs).
   g est donc croissante sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   $g(1) = 0$.
   Le tableau de variation de g est donc :

x	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

   Le minimum de g est 0, donc $g(x)$ est positif pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$.

2. (a) f est dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ comme somme et quotient de fonctions dérivables sur $[1\ ;\ +\infty[$.
   Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = 1 - \left[\dfrac{\frac{1}{x}\times x - \ln(x)}{x^2}\right] = 1 - \dfrac{1-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{x^2-1+\ln(x)}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$ donc $\boxed{f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}}$.

(b) Comme $x^2 > 0$ sur $[1\ ;\ +\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$, donc positif sur $[1\ ;\ +\infty[$ avec $f'(1) = 0$.

(c) Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x)}{x}$.

D'après la partie A, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} [f(x) - x] = 0$.

La droite $\mathscr{D}$ d'équation $y = x$ est donc asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

(d) Pour tout $x \in [1\ ;\ +\infty[$, $f(x) - x = -\dfrac{\ln(x)}{x} < 0$ car $\ln(x) \geqslant 0$ et $x > 0$.

La courbe $\mathscr{C}$ est donc en dessous de son asymptote $\mathscr{D}$ (avec intersection en $x = 1$).

3. (a) On a donc $M_kN_k = y_{N_k} - y_{M_k} = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

(b) L'algorithme est :

```
VARIABLES
  k EST_DU_TYPE NOMBRE
DEBUT_ALGORITHME
  k PREND_LA_VALEUR 2
  TANT_QUE (ln(k)/k>0.01) FAIRE
    DEBUT_TANT_QUE
    k PREND_LA_VALEUR k+1
    FIN_TANT_QUE
  AFFICHER k
FIN_ALGORITHME
```

V Amérique du Nord mai 2018

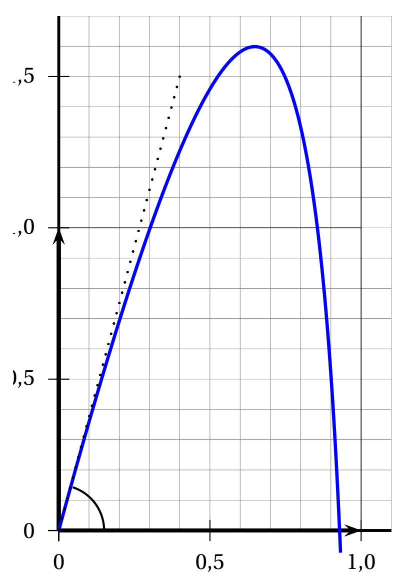
Lors d'une expérience en laboratoire, on lance un projectile dans un milieu fluide. L'objectif est de déterminer pour quel angle de tir θ par rapport à l'horizontale la hauteur du projectile ne dépasse pas 1,6 mètre.

Comme le projectile ne se déplace pas dans l'air mais dans un fluide, le modèle parabolique usuel n'est pas adopté.

On modélise ici le projectile par un point qui se déplace, dans un plan vertical, sur la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1[$ par :

$$f(x) = bx + 2\ln(1 - x)$$

où b est un paramètre réel supérieur ou égal à 2, x est l'abscisse du projectile, $f(x)$ son ordonnée, toutes les deux exprimées en mètres.



1. Puisque la fonction f est dérivable, et que l'on connaît sa fonction dérivée, on va étudier le signe de la fonction dérivée pour connaître les variations de la fonction f.

   Soit x dans $[0\ ;\ 1[$. On a $x < 1$ et donc, $0 < 1 - x$.

Le dénominateur de $f'(x)$ étant strictement positif, le signe de $f'(x)$ est le signe du numérateur, qui est une quantité affine, de coefficient directeur $-b$ négatif (puisque b est supérieur à 2) et donc on aura bien une fonction dérivée d'abord positive, pour $x \leqslant \dfrac{b-2}{b}$, puis négative.

On remarque le nombre $\dfrac{b-2}{b} = 1 - \dfrac{2}{b}$ est un nombre inférieur à 1 et positif, car b est un réel positif, supérieur à 2.

On peut donc affirmer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $\left[0\,;\,\dfrac{b-2}{b}\right]$ et décroissante sur $\left[\dfrac{b-2}{b}\,;\,1\right[$.

Ces variations indiquent que f atteint un maximum pour $x = \dfrac{b-2}{b} = 1 - \dfrac{2}{b}$.

Ce maximum est donc $f\left(1-\dfrac{2}{b}\right) = b \times \left(1-\dfrac{2}{b}\right) + 2\ln\left(1-\left(1-\dfrac{2}{b}\right)\right) = b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

Le maximum de la fonction f s'établit bien à $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right)$.

2. Si on essaye de résoudre l'inéquation $b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right) \leqslant 1,6$, on se retrouve devant une équation que l'on ne sait pas résoudre de façon exacte.

   On peut donc procéder à tâtons, par exploration à la calculatrice pour donner une réponse.

   La méthode la plus complète serait la suivante :

   Posons m la fonction définie sur $[2\,;\,+\infty[$ par $m(b) = b-2+2\ln\left(\dfrac{2}{b}\right) = b-2+\ln(4)-2\ln(b)$.

   La fonction m est dérivable sur son ensemble de définition et on a pour tout b supérieur à 2 :
   $m'(b) = 1 - \dfrac{2}{b}$.

   Comme b est supérieur à 2, on en déduit que $m'(b)$ est positif, et même strictement positif pour $b > 2$, et donc que la fonction m est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$.

   $m(2) = 2-2+\ln 1 = 0$.

   S'il y a un réel b_0 tel que $f(b_0) = 1,6$, on pourra donc dire que $2 \leqslant b \leqslant b_0 \iff 0 \leqslant m(b) \leqslant 1,6$.

   Par exploration à la calculatrice, on constate (par exemple) que $m(10) \approx 4,8$.

   La fonction m étant continue (car dérivable) et strictement croissante sur l'intervalle $[2\,;\,10]$ et 1,6 étant une valeur intermédiaire entre $m(0) = 0$ et $m(10) \approx 4,8$, le corollaire au théorème des valeurs intermédiaires permet d'affirmer qu'il existe un unique nombre b_0 antécédent de 1,6 par m sur $[2\,;\,10]$. Comme m est strictement croissante sur $[2\,;\,+\infty[$, il n'y aura pas d'autre antécédent que celui là.

   Un balayage à la calculatrice donne $5,69 < b_0 < 5,70$.

   Les valeurs du paramètre b garantissant une hauteur maximale $m(b)$ ne dépassant pas 1,6 mètre sont donc les réels de l'intervalle $[2\,;\,b_0]$, soit, en donnant une valeur approchée (nécessairement par défaut, vu que m est croissante) de l'intervalle $[2\,;\,5,69]$.

3. Si on choisit $b = 5,69$, alors, cela signifie que la tangente tracée en pointillés est la droite d'équation :
   $y = f'(0) \times (x-0) + f(0) = \dfrac{b-2}{1-0} \times x + 0 = (5,69-2)x = 3,69x$.

   Cela signifie que l'origine du repère, le point de coordonnée $(1\,;\,0)$ et le point de coordonnées $(1\,;\,3,69)$ forment un triangle rectangle, dans lequel le côté opposé à l'angle θ mesure 3,69 et le côté adjacent mesure 1, donc la tangente de l'angle est donnée par $\tan\theta = \dfrac{3,69}{1} = 3,69$.

   À la calculatrice (réglée en mode degrés), on obtient $\theta = \arctan(3,69) \approx 74,8°$

VI Constante d'Euler

l'objectif est de montrer que les suites (u_n) et (v_n), définies pourtout entier naturel n non nul, par :

$$u_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n) \text{ et } v_n = u_n - \frac{1}{n}$$

convergent vers une limite commune γ appelée constante d'Euler.

1. (a) Démontrons que, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_{n+1}-u_n = \frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right).$$

$u_{n+1}-u_n = \left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}-\ln(n+1)\right]-\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln(n)\right]$
$=\boxed{\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}+\ln(n)-\ln(n+1)=\frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)}$

(b) Soit f la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

- $\frac{x}{x+1} = \frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=1$.
  On en déduit $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X)=0$.
  $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x+1}\right)=0$.
  Par conséquent : $\boxed{\lim\limits_{x\to=\infty} f(x)=0}$.
- $f=\frac{1}{u}+\ln(v)$ donc $f' = u'+\frac{v'}{v}$ avec $u(x)=x+1$ et $v(x)=\frac{x}{x+1}$.
  Alors : $f' = -\frac{u'}{u^2}+\frac{v'}{v}$ avec $u'(x)=1$ et $v'(x)=\frac{1\times(x+1)-1\times x}{(x+1)^2}=\frac{1}{(x+1)^2}$.
  D'où $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-x+(x+1)}{x(x+1)^2} = \boxed{\frac{1}{x(x+1)^2}>0}$.
  f est donc croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.
- f est croissante et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ donc f est négative sur $[1\,;\,+\infty[$

On en déduit que, pour tout n, $u_{n+1}-u_n \leqslant 0$ donc la suite (u_n) est **décroissante**.

2. Pour tout n, $v_{n+1}-v_n = \left[u_{n+1}-\frac{1}{n+1}\right]-\left[u_n-\frac{1}{n}\right]$
$=u_{n+1}-u_n+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+1}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right)+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n}+\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n}-\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$
$=\boxed{\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$.
On pose $g(x) = \frac{1}{x}-\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.
$g'(x) = -\frac{1}{x^2}-\frac{-\frac{1}{x^2}}{1+\frac{1}{x}} = -\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x(x+1)} = \frac{-(x+1)+x}{x^2(x+1)} = -\frac{1}{x^2(x+1)}<0$ donc g est décroissante.
$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ donc $g(x)>0$ pour tout x.
On en déduit que la suite (v_n) est croissante.

(3) (a) Pour tout n, $v_n = u_n - \dfrac{1}{n} \leqslant u_n$ car $\dfrac{1}{n} > 0$ donc $\boxed{v_n \leqslant u_n}$

(b) (u_n) est décroissante donc $u_n \leqslant u_0$ et comme $v_n \leqslant v_0$, on a $\boxed{v_n \leqslant v_0}$.

La suite (v_n) est croissante et majorée donc elle converge vers une suite $\boxed{\ell}$.

De même, (v_n) est croissante, donc minorée par v_0 et comme $v_n \leqslant u_n$, $\boxed{v_0 \leqslant u_n}$.

La suite (u_n) est décroisante et minorée par v_0 donc convervente vers un rél e $\boxed{\ell'}$. $u_n - v_n$ converge donc vers $\ell' - \ell$.

Or $u_n - v_n = \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

Comme la limite d'une suite est unique, on en déduit $\ell' - \ell = 0$ donc $\boxed{\ell = \ell'}$; on note cette limite unique γ dite constante d'Euler ou plus précisément constante d'Euler-Mascheroni. (plus de renseignements ici)

4. $\gamma \approx 0,58$.

Remarque : cette croissante est lente et il est difficile d'obtenir un résultat précis, due à des propagations d'erreurs (voir lien ci-dessus).

Il faut recourir à des astuces de calculs pour ontenir des valeurs plus précises.