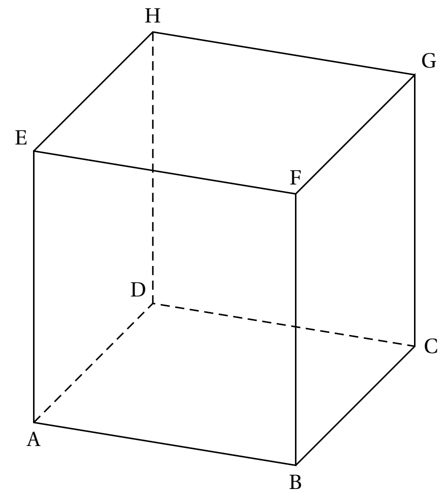
Correction

I Polynésie septembre 2020

Soit ABCDEFGH un cube. L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(\text{A} ; \overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



Pour tout réel t, on considère le point M de coordonnées $(1-t\,;\ t\,;\ t)$.

1. Le point B a pour coordonnées $(1\,;\ 0\,;\ 0)$, et comme $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE}$, le point H a pour coordonnées $(0\,;\,1\,;\,1)$.
   Le vecteur $\overrightarrow{BM}$ a pour coordonnées $(1-t-1\,;\ t-0\,;\ t-0)$ soit $(-t\,;\ t\,;\ t)$.
   Le vecteur $\overrightarrow{BH}$ a pour coordonnées $(0-1\,;\ 1-0\,;\ 1-0)$ soit $(-1\,;\ 1\,;\ 1)$.
   On a donc $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BH}$, donc les vecteurs $\overrightarrow{BM}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont **colinéaires**, ce qui prouve que le point M appartient à la droite (BH) pour tout réel t.

On admet que les droites(BH) et (FC) ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & t \\ z & = & t \end{array}\right. \quad \text{où } t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1 \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. \quad \text{où } t' \in \mathbb{R}.$$

1. On va démontrer que les droites (BH) et (FC) sont orthogonales et non coplanaires.
   - D'après sa représentation paramétrique, la droite (BH) est dirigée par le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(-1\,;\ 1\,;\ 1)$.

     D'après sa représentation paramétrique, la droite (FC) est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{n'}$ de coordonnées $(0\,;\ 1\,;\ -1)$.

     $\vec{n} \cdot \overrightarrow{n'} = (-1) \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 0$ donc $\boxed{\vec{n} \perp \overrightarrow{n'}}$.
     On en déduit que les droites (BH) et (FC) sont **orthogonales**.
   - Si les droites les droites (BH) et (FC) sont coplanaires, comme elles sont orthogonales, elles seront sécantes ; il suffit donc de prouver que les droites (BH) et (FC) ne sont pas sécantes pour démontrer qu'elles ne sont **pas coplanaires**.

     Les droites (BH) et (FC) sont sécantes si on peut trouver t et t' tels que : $\left\{\begin{array}{lcl} 1-t & = & 1 \\ t & = & t' \\ t & = & 1-t' \end{array}\right.$.

Ce système n'a pas de solution donc les droites (BH) et (FC) ne sont pas sécantes, donc elles ne sont pas coplanaires.

2. Pour tout réel t', on considère le point $\mathrm{M}'(1; t'; 1-t')$.

(a) $\mathrm{MM}'^2 = (1-1+t)^2 + (t'-t)^2 + (1-t'-t)^2 = t^2 + t'^2 - 2tt' + t^2 + 1 - t' - t - t' + t'^2 + tt' - t + tt' + t^2$
$= 3t^2 + 2t'^2 - 2t' - 2t + 1$

$$3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6} = 3\left(t^2 - \frac{2t}{3} + \frac{1}{9}\right) + 2\left(t'^2 - \frac{2t'}{2} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{6}$$
$$= 3t^2 - 2t + \frac{1}{3} + 2t'^2 - 2t' + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 3t^2 + 2t'^2 - 2t' - 2t + 1 = \mathrm{MM}'^2.$$

Autre façon :

$$3t^2 + 2t'^2 - 2t' - 2t + 1 = 3t^2 - 2t + 2t'^2 - 2t' + 1 = 3\left(t^2 - \frac{2}{3}t\right) + 2\left(t'^2 - t'\right) + 1$$

$$= 3\left[(t-\frac{1}{3})^2 - \frac{1}{9}\right] + 2\left[\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\right] + 1 = 3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \boxed{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2 + 2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{6}}$$

(b) La distance MM' est minimale quand MM'^2 est minimale.
MM'^2 est la somme de trois nombres positifs ou nuls, et sera minimale quand chacun de ces nombres est minimal.

- $3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2$ est minimale et vaut 0 pour $t = \frac{1}{3}$;
- $2\left(t'-\frac{1}{2}\right)^2$ est minimale et vaut 0 pour $t' = \frac{1}{2}$.

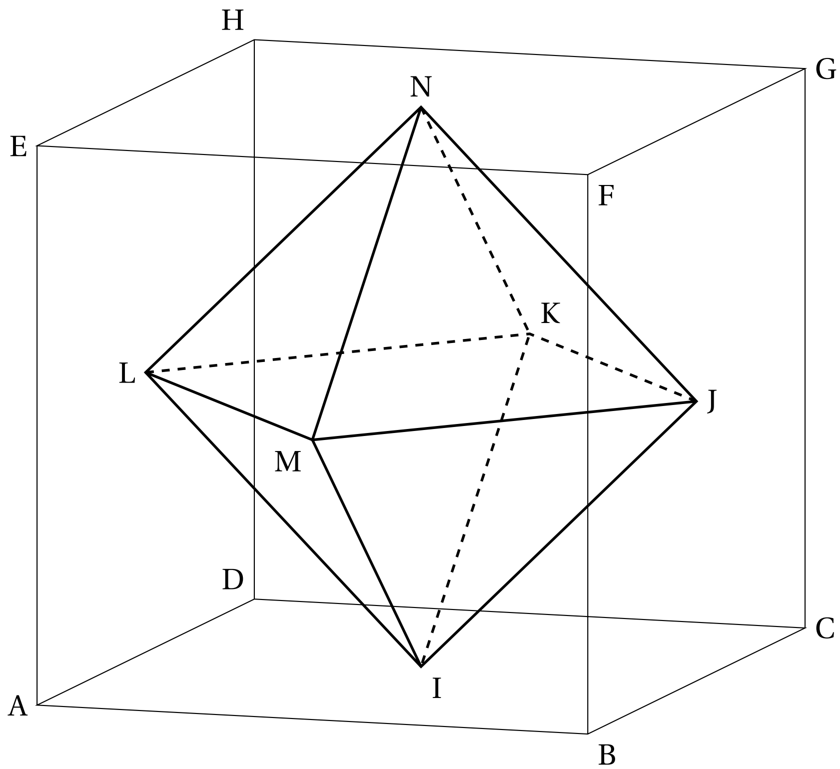
Donc MM' est minimale pour $t = \frac{1}{3}$ et $t' = \frac{1}{2}$; dans ce cas $\mathrm{MM}' = \sqrt{\frac{1}{6}}$.

(c) On nomme P le point de coordonnées $\left(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ et Q celui de coordonnées $\left(1 ; \frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$.

- Le point P appartient à la droite (BH) pour $t = \frac{1}{3}$, donc (BP) = (BH).
- Le point Q appartient à la droite (FC) pour $t' = \frac{1}{2}$, donc (QC) = (FC).
- Le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ a pour coordonnées $\left(1-\frac{2}{3} ; \frac{1}{2}-\frac{1}{3} ; \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{6} ; \frac{1}{6}\right)$.
- Le vecteur $\overrightarrow{BP}$ a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}-1 ; \frac{1}{3}-0 ; \frac{1}{3}-0\right) = \left(-\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$.
- $\overrightarrow{BP} \cdot \overrightarrow{PQ} = \left(-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = -\frac{1}{9} + \frac{1}{18} + \frac{1}{18} = 0$ donc $\overrightarrow{BP} \perp \overrightarrow{PQ}$ donc la droite (PQ) est perpendiculaire à la droite (BP) donc à la droite (BH).
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$ donc C a pour coordonnées (1 ; 1 ; 0).
- Le vecteur $\overrightarrow{QC}$ a pour coordonnées $\left(1-1 ; 1-\frac{1}{2} ; 0-\frac{1}{2}\right) = \left(0 ; \frac{1}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$.
- $\overrightarrow{QC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \times \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{6}\right) = 0 + \frac{1}{12} - \frac{1}{12} = 0$ donc $\overrightarrow{QC} \perp \overrightarrow{PQ}$ donc la droite (PQ) est perpendiculaire à la droite (QC) donc à la droite (FC).

Donc la droite (PQ) est perpendiculaire aux deux droites (BH) et (FC).

II Amérique du Nord mai 2019



1.

L et M sont les milieux respectifs de [AH] et [AF] donc d'après le théorème de la droite des milieux dans AFH, on en déduit que (LM) est parallèle à (FH).

(IN) et (BF) sont parallèles car BFNI est un rectangle or (BF) est perpendiculaire au plan (EFG) donc à la droite (FH).

On a alors (IN) perpendiculaire à (FH) et comme (LM) est parallèle à (FH), on en déduit finalement que (IN) et (ML) sont orthogonales.

1. (a)

Dans $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$ on a

$C(1\,;1\,;0)$, $M\left(\frac{1}{2}\,;0\,;\frac{1}{2}\right)$ et $L\left(0\,;\frac{1}{2}\,;\frac{1}{2}\right)$

Donc $\boxed{\overrightarrow{NC}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ -1\end{pmatrix}}$ et $\boxed{\overrightarrow{ML}\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}}$.

(b)

Le repère $\left(A\,;\,\overrightarrow{AB}\,;\,\overrightarrow{AD}\,;\,\overrightarrow{AE}\right)$ est orthonormé donc on peut calculer un produit scalaire.

$\overrightarrow{NC}\cdot\overrightarrow{ML} = -\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+0=0$

On en déduit que les vecteurs sont orthogonaux donc (NC) et (ML) sont orthogonales.

(c)

(ML) est orthogonale à (NC) et à (IN) qui sont deux droites sécantes du plan (NCI) donc (ML) est perpendiculaire au plan (NCI).

$\overrightarrow{\mathrm{ML}}\begin{pmatrix}-0,5\\0,5\\0\end{pmatrix}$ est donc normal à (NCI) d'où $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ est normal à (NCI).

On a alors (NCI) : $x-y+d=0$ or C ∈ (NCI) d'où $x_C-y_C+d=0 \equiv d=0$.

Finalement (NCI) : $x-y=0$.

2. (a)

Dans $\left(\mathrm{A}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AD}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AE}}\right)$ on a $\mathrm{N}\left(\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\,;1\right)$, $\mathrm{J}\left(1\,;\dfrac{1}{2}\,;\dfrac{1}{2}\right)$ et $\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2}\,;0\,;\dfrac{1}{2}\right)$

$x_N-y_N+z_N=1$

$x_J-y_J+z_J=1$

$x_N-y_N+z_N=1$

(NJM) a donc bien pour équation cartésienne $\boxed{x-y+z=1}$.

(b)

$\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est normal à (NJM) d'après l'équation cartésienne trouvée précédemment. Or $\overrightarrow{\mathrm{DF}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

Finalement, la droite (DF) est perpendiculaire au plan (NJM).

(c)

N appartenant à ces deux plans, la droite cherchée passe par N.

Soit $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ un vecteur directeur de cette droite. $\overrightarrow{w}$ est orthogonal aux vecteurs normaux des deux plans, on a donc :

$$\begin{cases}\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=0\\\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{n}=0\end{cases}\iff\begin{cases}a-b=0\\a-b+c=0\end{cases}\iff\begin{cases}a=b\\c=0\end{cases}$$

En posant $a=b=1$, on en déduit que la droite d'intersection entre les plans (NCI) et (NJM) passe par N et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$.

Il s'agit de la droite (EG) car $\overrightarrow{\mathrm{EG}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et N est le milieu de [EG].