# Spécialité-Terminale : correction du contrôle de géométrie dans l'espace

## I

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\,;\,\vec{k}\right)$.

On considère les vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix}$.

1. $\dfrac{5}{1}=5$ et $\dfrac{-1}{-2}=\dfrac{1}{2}\neq 5$ donc ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires; ils définissent bien un plan.
2. - $\vec{w}\cdot\vec{u}=0\times 1+2\times(-2)+1\times 4=0$ donc $\boxed{\vec{w}\perp\vec{u}}$.
   - $\vec{w}\cdot\vec{v}=0\times 5+2\times(-1)+1\times 2=0$ donc $\boxed{\vec{w}\perp\vec{v}}$.

   $\vec{w}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$, donc au plan défini par ces deux vecteurs. 2,5

## II

Soit le plan $\mathscr{P}$, passant par A(1; 2; 5) et ayant pour vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-3\\5\end{pmatrix}$.

Une équation de ce plan est $1\left(x-x_A\right)-3\left(y-y_A\right)+5\left(z-z_A\right)=0\Leftrightarrow 1(x-1)-3(y-2)+5(z-5)=0$
$\Leftrightarrow \boxed{x-3y+5z-20=0}$ 2

## III

On considère un repère orthonormé de l'espace.

Soient $d$ la droite passant par $A(1\,;\,-7\,;\,4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-2\\7\end{pmatrix}$ et $d'$ la droite passant par $B(0\,;\,3\,;\,1)$ et de vecteur directeur $\vec{v}\begin{pmatrix}-10\\2\\2\end{pmatrix}$.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=-10-4+14=0$ donc $\vec{u}\perp\vec{v}$.
Ces deux droites $d$ et $d'$ sont bien orthogonales. 2

## IV

$A$, $B$ et $C$ sont trois points de l'espace tels que $AB=3$, $AC=6$ et $\widehat{BAC}=60^\circ$.
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)=3\times 6\times\dfrac{1}{2}=9$ donc $\boxed{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=9}$. 2

## V

On considère un repère orthonormé de l'espace.
On considère les points $A$, $B$ et $C$ tels que :
$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\3\\7\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

1. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-1+6+21=\boxed{26}$.
2. - $AB=\sqrt{(-1)^2+3^2+7^2}=\sqrt{1+9+49}=\boxed{\sqrt{59}}$.
   - $AC=\sqrt{1^2+2^2+3^2}=\sqrt{1+4+9}=\sqrt{14}$.
3. On sait que $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\left(\widehat{BAC}\right)$ donc :

   $\cos\left(\widehat{BAC}\right)=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\times AC}=\dfrac{26}{\sqrt{59}\times\sqrt{14}}$ donc $\widehat{BAC}\approx\boxed{25{,}22\,^\circ}$

3

## VI

Soient $\mathscr{P}_1$ le plan d'équation cartésienne $10x + y - 2z - 2 = 0$ et $\mathscr{P}_2$ le plan d'équation $-x + 6y + 2z - 2 = 0$.

- $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix}10\\1\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_1$.
- $\overrightarrow{n_2}\begin{pmatrix}-1\\6\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathscr{P}_2$.

$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = -10 + 6 - 4 = -8 \neq 0$.
Cs deux vecteurs ne sont pas orthogonaux; les deux plans ne sont pas perpendiculaires. 2

## VII

Soient $\mathscr{D}_1$ et $\mathscr{D}$ deux droites de l'espace dont des représentations paramétriques sont :

$\mathscr{D}_1 : \begin{cases} x = -3t + 7 \\ y = t + 4 \\ z = -2t + 1 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ et

$\mathscr{D}_2 : \begin{cases} x = 3u - 2 \\ y = 2u + 1 \\ z = -5u + 9 \end{cases}$, $u \in \mathbb{R}$.

Pour savoir si ces deux droites sont sécantes, on cherche si elles ont un point d'intersection, en résolvant le sustème formé par ces deux représentations paramétriques.

$\begin{cases} -3t + 7 = 3u - 2 \ (L_1) \\ t + 4 = 2u + 1 \ (L_2) \\ -2t + 1 = -5u + 9 \ (L_3) \end{cases}$.

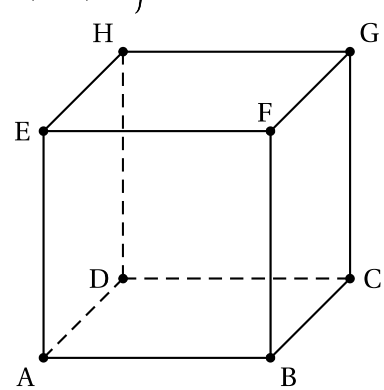
$L_2$ donne $t = 2u - 3$.
Òn remplace $t$ par $2u - 3$ dans $(L_1)$ et $(L_3)$.
On obtient :

$\begin{cases} -3(2u-3) + 7 = 3u - 2 \\ -2(2u-3) + 1 = -5u + 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -9u = -18 \\ u = 2 \end{cases} \Leftrightarrow u = 2$

$u = 3$.
On en déduit $t = 2u - 2 = 1$.
Ces deux représentations paramétriques donnent le même point pour $u = 2$ et $t = 1$.
Les deux droites sont sécantes; leur intersection est $\boxed{A(4\,;\,5\,;\,-1)}$ 2

## VIII

On considère ke cube $ABCDEFGH$ représenté ci-dessous.
On se place dans le repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AD}}, \overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



On considère la droite dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x=-20t \\ y=20t+1 \\ z=-20t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.

- $F(1\,;\,0\,;\,1)$ ; $F$ vérifie cette représentation paramétrique avec $t=-\dfrac{1}{20}$.
- $D(0\,;\,1\,;\,0)$ ; $D$ vérifie cette représentation paramétrique avec $t=0$.

La droite dont nous avons la représentation paramétrique passe par $F$ et $D$ ; c'est bien la droite $(FD)$. 2

## IX

On considère dans l'espace muni d'un repère le plan $\mathscr{P}$ d'équation cartésienne $2x+3y-z+2=0$ et $\mathscr{Q}$ d'équation $x+y-2z+5=0$.

1. - $\mathscr{P}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$
   - $\mathscr{Q}$ a pour vecteur normal $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

   Ces deux vecteurs ne sont clairement pas colinéaires, donc ces deux plans ne sont pas parallèles.
   Ils sont sécants.
   On note $\Delta$ l'intersection de ces plans.
2. $M(x\,;\,y\,;\,z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+3y-z+2=0 \\ x+y-2z+5=0 \end{cases}$.
   ‘ Prenons $z$ comme paramètre.
   Le système s'écrit alors :
   $\begin{cases} z=t \\ 2x+3y=t-2 \\ x+y=2t-5 \end{cases}, t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z=t \\ 2x+3y=t-2 \\ 2x+2y=4t-10 \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
   En soustrayant les deux dernières lignes, il vient :
   $y=-3t+8$.
   On remplace dans l'équation $x+y=2t-5$ ; il vient $x=2t-5-y=2t-5-(-3t+8)=5t-13$.

   Conclusion : $\Delta$ a pour représentation paramétrique : $\boxed{\begin{cases} x=5t-13 \\ y=-3t+8 \\ z=t \end{cases}, \ t\in\mathbb{R}}$.

   On peut préférer prendre $x$ ou. $y$ comme paramètre!

2,5