Fonction exponentielle

Table des matières

I

Activité A page 176

I.1 La fonction exponentielle

II Définition et propriétés algégriques

Définition

Il existe une fonction f et une seule définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
pour tout réel x, $f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$.
Cette fonction est appelée fonction exponentielle et notée exp : $x \mapsto \exp(x)$

Démonstration :

- L'existence est admise
- Unicité :
  Montrons d'abord que f ne s'annule pas.
  On définit la fonction h par $h(x) = f(-x) \times f(x)$.
  $f(-x) = f(ax+b)$ avec $a = -1$ et $b = 0$ donc la dérivée de $u : x \mapsto f(-x)$ est $u'(x) = -f'(-x)$.
  $h = uf$ avec $u(x) = f(-x)$.
  $h' = u'f + uf'$ d'où $h'(x) = -f'(-x) \times f(x) + f(-x) \times f(x) = 0$.
  Comme $h' = 0$, h est **constante**.
  Pour tout x, $h(x) = h(0) = \left[f(0)\right]^2 = 1^2 = 1$ donc $f(-x)f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  f ne peut pas s'annuler, sinon il existerait ue valeur de x pour laquelle on aurait $f(-x)f(x) = 0$.

  Supposons qu'il existe une autre fonction g vérifiant $\begin{cases} g' = g \\ g(0) = 1 \end{cases}$

  Considérons alors la fonction $k = \dfrac{f}{g}$.
  k est définie sur $\mathbb{R}$ puisque g ne s'annule pas.
  $k' = \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2} = \dfrac{fg - fg}{g^2} = 0$ car $f' = f$ et $g' = g$.
  $k' = 0$ donc k est **constante**.
  $k(0) = \dfrac{f(0)}{g(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.
  Puisque $\dfrac{f}{g} = 1$, pour tout x, $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$ donc $f(x) = g(x)$ d'où $\boxed{f = g}$.
  IL n'y a donc qu'une seule fonction possible.

II.1 Propriétés algébriques

Relation fonctionnelle

Pour tous réels x et y, on a $\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$.

Démonstration :

Soit y un bel fixé, quelconque.

On définit la fonction $g : x \mapsto \dfrac{\exp[x+y]}{\exp(x)}$. La variable est donc x.

$g = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = \exp(x+y) \\ v(x) = \exp(x) \end{cases}$.

$g' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $u'(x) = 1 \times u'(x+y) = \exp'(x+y) = \exp(x+y)$

$v'(x = \exp'(x) = \exp(x))$.

Alors : $g'(x) = \dfrac{\exp(x+y) \times \exp(x) - \exp(x) \times \exp(x+y)}{[\exp(x)]^2} = 0$.

$g' = 0$ donc g est constante. Cette constante vaut $g(0) = \dfrac{\exp(y)}{\exp(0)} = \exp(y)$.

Donc, pur tout x, $\dfrac{\exp(x+y)}{\exp(x)} = \exp(y)$ d'où $\boxed{\exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)}$

Propriété

Pour tous nombres x et y, $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$

Démonstration :

$\exp(x) = \exp((x-y)+y) = \exp(x-y) \times \exp(y)$ donc $\exp(x-y) = \dfrac{\exp(x)}{\exp(y)}$.

II.2 Lien avec les suites géométriques

Propriété

Soit a un réel et (u_n) la suite de terme général $\exp(na)$ où n est un entier naturel.

- La suite (u_n) est une suite géométrique de premier terme $u_0 = 1$ et de raison $\exp(a)$.
- Pour tout entier n et tout réel a, $\exp(na) = (\exp(a))^n$.

Démonstration :.

Pour tout n, $u_{n+1} = \exp((n+1)a) = \exp(a + na) = \exp(a) \times \exp(na) = \exp(a) \times u_n$.

La suite (u_n) est bien géométrique, de raison $q = \exp(a)$ et de premier terme $\exp(0) = 1$.

Alors $u_n = u_0 q^n = 1 \times (\exp(a))^n = (\exp(a))^n$.