Produits scalaire de deux vecteurs dans le plan

Table des matières

Activités préparatoires du livre page 205

Exercices n° 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 8 page 207

I Produit scalaire

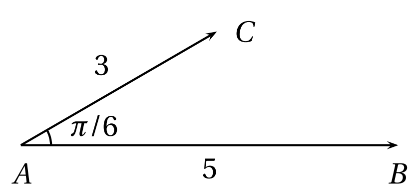
I.1 Définition du produit scalaire

Définition du produit scalaire

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ et trois points A, B et C tels que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC}$.
Le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, noté $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$, est le nombre réel défini par :

- si $\overrightarrow{u} \neq \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \left\|\overrightarrow{u}\right\| \times \left\|\overrightarrow{v}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
- si $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ ou $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Exemple : Soient A, B et C trois points distincts tels que $AB = 5$, $AC = 3$ et $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{6}$.



On a :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \times \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right) = 5 \times 3 \times \cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 15 \times \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

I.2 Vecteurs colinéaires, carré scalaire

Propriété

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non nuls et colinéaires.

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ vont le même sens, alors $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.
  En particulier : $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u}^2 = ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{u}|| = ||\overrightarrow{u}||^2$. ($\overrightarrow{u}^2$ est appelé le carré scalaire de $\overrightarrow{u}$).
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont de sens contraire, alors :
  $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v} = -||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$.

En effet, si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de même sens, $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \cos(0) = 1$ et si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires de sens sontraires, $\cos\left(\widehat{BAC}\right) = \cos(\pi) = -1$

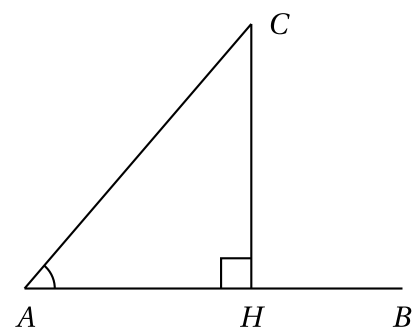
I.3 Projection orthogonale et vecteurs orthogonaux

Propriété

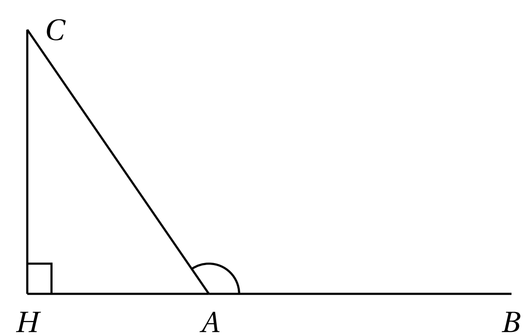
Soient trois points A, B et C (A et B distincts).
Si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB), alors : $AB\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.

Remarque :
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

Si $\widehat{BAC} < \dfrac{\pi}{2}$ (angle aigu), $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| \times \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$
$= AB \times AC \times \cos\widehat{BAC} = AB \times AH = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$ car
$AH = AC \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.



Si $\widehat{BAC} > \dfrac{\pi}{2}$ (angle obtus),
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$
$= \left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right| \times \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right| \times \cos\left(\widehat{BAC}\right)$.
Or, $\widehat{BAC} = \pi - \widehat{HAC}$, donc
$\cos(BAC) = \cos\left(\pi - \widehat{HAC}\right)$
$= -\cos\left(\widehat{HAC}\right)$.
On en déduit :
$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -AB \times AC \times \cos\left(\widehat{HAC}\right)$
$= -AB \times AH = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}$.



Définition

Deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux lorsque $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 0$.

Propriété

Soient trois points A, B et C distincts.
Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux si, et seulement si, les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.

Exemple :

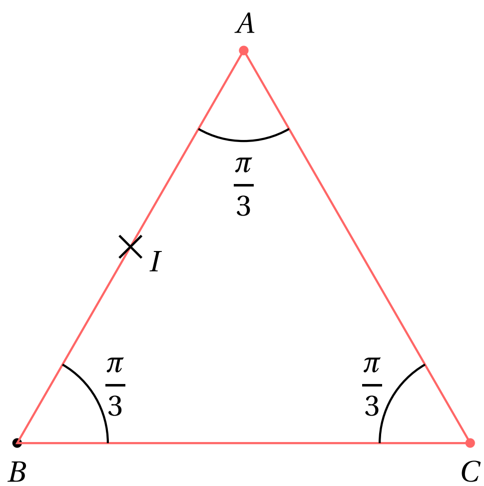
ABC est un triangle équilatéralde côté 2.
I est le milieu du segment $[AB]$.
Calculer les produits scalaires :

a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}$

b) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA}$

Solution :



a) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA} = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \times \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \times \cos\left(\widehat{CBA}\right)$
$= BC \times BA \times \cos\left(\widehat{CBA}\right) = 2 \times 2 \times \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = 4 \times \frac{1}{2} = \boxed{2}$.

b) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AC} = AI \times AC \times \cos\left(\widehat{IAC}\right) = 1 \times 2 \times \frac{1}{2} = \boxed{1}$

c) $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA} = -CB \times CA \times \cos\left(\widehat{ACB}\right)$
$= -2 \times 2 \times \cos\frac{\pi}{3} = -4 \times \frac{1}{2} = \boxed{-2}$

II Propriétés du produit scalaire

II.1 Symétrie et bilinéarité

Propriété

Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ des vecteurs et k un réel.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=\vec{v}\cdot\vec{u}$ (symétrie)
- $\left(\vec{u}+\vec{v}\cdot\vec{w}=\vec{u}\cdot\vec{w}+\vec{v}\cdot\vec{w}\right)$ (linéarité par rapport au premier vecteur)
- $\left(k\vec{u}\right)\cdot v=k\vec{u}\cdot\vec{v}$
- $\vec{u}\cdot\left(\vec{v}+\vec{w}\right)=\vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ (linéarité par rapport au deuxième vecteur)
- $\vec{u}\cdot\left(k\vec{v}\right)=k\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right)$

Remarque :
Le produit scalaire est linéaire à gauche et à droite, on dit qu'il est bilinéaire.

II.2 Expression du produit scalaire dans un repère orthonormé

On suppose que le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ qu'on appelle aussi base.

Propriété

Soient $\vec{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$.

- $\vec{u}\cdot\vec{v}=xx'+yy'$
- $\vec{u}^2=\left|\left|\vec{u}\right|\right|^2=x^2+y^2$

Démonstration :
On a : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}$ et $\vec{u}=x'\vec{i}+y'\vec{j}$.
Alors :
$\vec{u}cdot\vec{v}$
$=\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right)\cdot\left(x'\vec{i}+y'\vec{j}\right)$
$=x\vec{i}\cdot x'\vec{i}+x\vec{i}\cdot y'\vec{j}+y\vec{j}\cdot x'\vec{i}+y\vec{j}\cdot y'\vec{j}$
$=xx'\vec{i}^{\,2}+xy'\vec{i}\cdot\vec{j}+x'y\vec{j}\cdot\vec{i}+yy'\vec{j}^{\,2}$
$=xx'+yy'$ car $\vec{i}^{\,2}=\left|\left|\vec{i}\right|\right|^2=1^2=1=\left|\left|\vec{j}\right|\right|^2$ et $\vec{i}\cdot\vec{j}=0$ (vecteurs orthogonaux)

Exemple :
Soient : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-8\\7\end{pmatrix}$.
$\vec{u}\cdot\vec{v}=3\times(-8)+5\times7=-24+35=\boxed{11}$

II.3 Norme et produit scalaire

En appliquant les règles de calculs précédentes, on obtient :

Propriétés

Soient deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$:

- $\left|\left|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right|\right|^2=\left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+||v||^2$
- $\left|\left|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right|\right|^2=\left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|^2-2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+||v||^2$
- $\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right)=\left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|^2-\left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|^2$

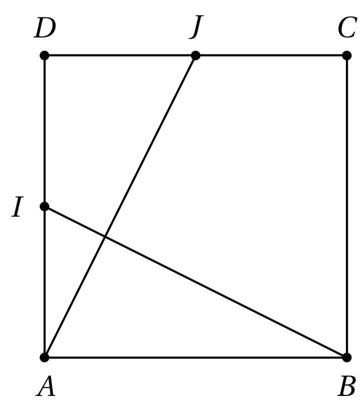
Justification :
Par exemple : $\left|\left|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right|\right|^2=\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)\cdot\left(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right)=\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}=\left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|^2+2\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+\left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|^2$.

On en déduit :

Propriétés

- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\left(\left|\left|\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}\right|\right|^2-\left|\left|\overrightarrow{u}\right|\right|^2-\left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|^2\right)$
- $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=\dfrac{1}{2}\left(\left|\left|\overrightarrow{u})\right|\right|^2+\left|\left|\overrightarrow{v}\right|\right|^2-\left|\left|\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}\right|\right|^2\right)$

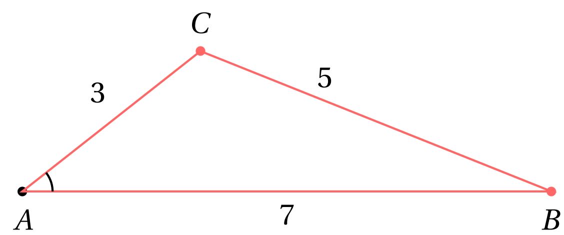
Exercice Soit $ABCD$ un carré de côté a ; I est le milieu de $[AD]$ et J est le milieu de $[CD]$.
Montrer que les droites (BI) et (AJ) sont perpendiculaires.



Solution : Pour montrer que les droites (AJ) et (BI) sont perpendiculaires, on va montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$ et $\overrightarrow{BI}$ sont orthogonaux, en calculant leur produit scalaire et en utilisant la relation de Charles.
$\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BI}$
$=\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DJ}\right)\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AI}\right)$
$=\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DJ}\cdot\overrightarrow{AI}$
$=0+a\times\dfrac{a}{2}+\left(-\dfrac{a}{2}\times a\right)+0=\boxed{0}$.
En effet :

$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont orthogonaux donc leur produit scalaire est nul.
De même pour $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{AI}$.
$\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires de même sens.
$\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires de sens contraires.
On en déduit que les droites (AJ) et (BI) sont perpendiculaires.

Exercice
Soit ABC un triangle tel que $AB = 7$, $BC = 5$ et $AC = 3$.
Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ et la mesure de $\widehat{BAC}$.



On a :
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\left(\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|^2 + \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|^2 - \left|\left|\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right|\right|^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|^2 + \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|^2 - \left|\left|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}\right|\right|^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(\left|\left|\overrightarrow{AB}\right|\right|^2 + \left|\left|\overrightarrow{AC}\right|\right|^2 - \left|\left|\overrightarrow{CB}\right|\right|^2\right)$
$= \frac{1}{2}\left(7^2 + 3^2 - 5^2\right) = \frac{1}{2}(49 + 9 - 25) = \boxed{\frac{33}{2}}$.

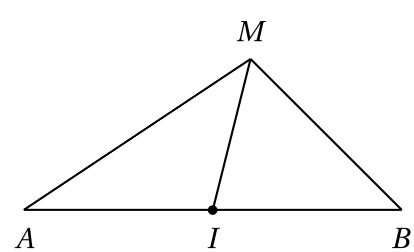
On en déduit que $BAC \approx \boxed{38,21^\circ}$

III Applications du produit scalaire

III.1 Théorème de la médiane

Théorème
Soient deux points du plan et I le milieu de $[AB]$.
Pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI}^2 - \frac{AB^2}{4}$$

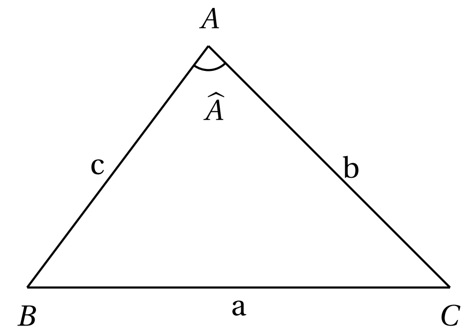


Démonstration :
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$
$= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)\cdot\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)$
$= \overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\cdot\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}$
$= MI^2+\overrightarrow{MI}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\right)}_{\overrightarrow{0}}-IA\times IB$
$= MI^2-\dfrac{AB^2}{4}$ car $\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires de sens contraires donc $\overrightarrow{IA}\cdot\overrightarrow{IB}=-IA\times IB=-\dfrac{AB}{2}\times\dfrac{AB}{2}=-\dfrac{AB^2}{4}$.

III.2 Formule d'Al-Kashi

Propriété

Soit un triangle ABC avec $AB=c$, $BC=a$ et $AC=b$.
Alors : $a^2=b^2+c^2-2bc\cos\left(\widehat{A}\right)$



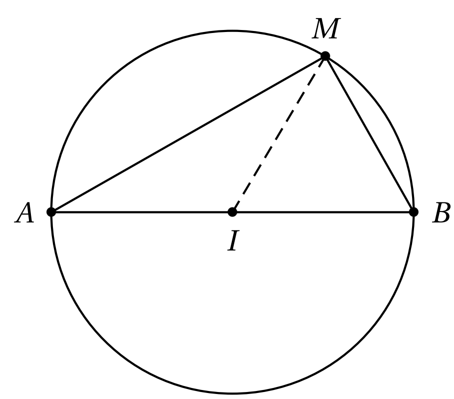
Démonstration :
$a^2=\overrightarrow{BC}^2$
$=\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)^2$ (relation de Chasles)
$=\left(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}\right)^2$
$=\overrightarrow{AC}^2+\overrightarrow{AB}^2-2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$
$=b^2+c^2-2bc\cos\left(\widehat{A}\right)$

Remarque : La formule d'Al-Kashi est une **généralisation du théorème de Pythagore** au cas des triangles quelconques.

III.3 Caractérisation du cercle

Propriété

Soient trois points A, B et M du plan.
$\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}$ si, et seulement si, M appartient au cercle de diamètre $[AB]$



Démonstration : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=MI^2-\dfrac{AB^2}{4}=\left(\dfrac{AB}{2}\right)^2-\dfrac{AB^2}{4}=0$ car $MI=IA=IB=\dfrac{AB}{2}$