# Spécialité Première : Devoir sur feuille n° 2

## I

On dispose d'un crédit de 414 000 euros pour atteindre dans un désert une nappe souterraine . Le coût du forage est fixé à 1 000 euros pour le premier mètre creusé, 1 200 pour le deuxième, 1 400 pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 euros par mètre creusé.
On pose $u_0 = 1000$ , $u_1 = 1200 \ldots$
$u_n$ désigne donc le coût en euros du (n+1)-ième mètre creusé.

1. (a) Calculer $u_5$.
   (b) Exprimer $u_{n+1}$ en fonction de $u_n$ , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (c) En déduire la nature de la suite $(u_n)$.
   (d) Exprimer $u_n$ en fonction de $n$ , pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec $n \neq 0$) , on désigne par $S_n$ le coût total en euros d'un puits de $n$ mètres.
   Déterminer le coût total d'un puits de $n$ mètres.
3. Déterminer la profondeur maximale que l'on peut atteindre avec le crédit de 414 000 euros.

## II

On considère deux suites $(u_n)$ et $(v_n)$ définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \text{ et } v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}.$$

1. On définit la suite $(w_n)$ par $w_n = u_n + v_n$.
   (a) Montrer que la suite $(w_n)$ est géométrique. Préciser sa raison, son premier terme ainsi que son sens de variation.
   (b) Donner le terme général de $w_n$.
2. On définit la suite $(t_n)$ par $t_n = u_n - v_n$.
   (a) Montrer que la suite $(t_n)$ est arithmétique. Préciser sa raison, son premier terme ainsi que son sens de variation.
   (b) Donner le terme général de $t_n$.
3. Donner le terme général de $u_n$ (indication : calculer $w_n + t_n$)
4. Donner le terme général de $v_n$.

## III

1. Soient $u$ et $v$ deux réels.
   (a) Développer le produit $(x-u)(x-v)$.
   (b) En déduire que les réels $u$ et $v$ sont les racines du polynôme $x^2 - Sx + P$ où $S = u + v$ et $P = uv$.
2. Existe-t-il deux nombres réels $u$ et $v$ :
   (a) dont le produit est 6 et la somme 4 ?
   (b) dont le produit est 6 et la somme 8 ?
3. Écrire en langage naturel un algorithme qui permet de déterminer deux entiers dont la somme et le produit sont deux réels fixés et entrés par l'utilisateur.

## IV Équation bicarrée

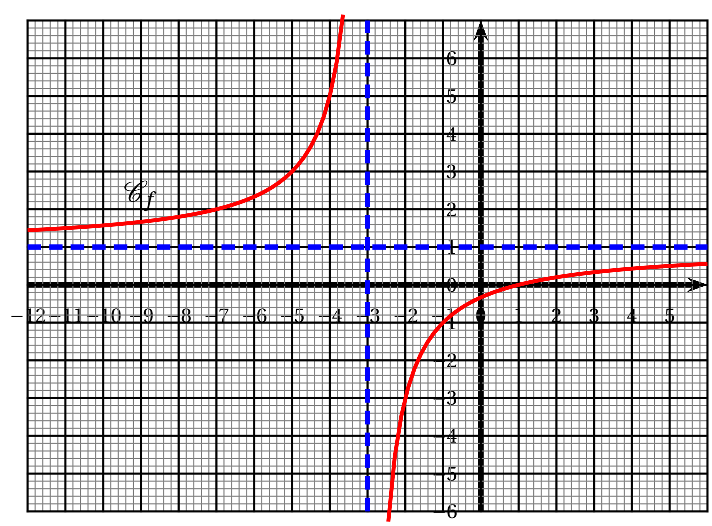
On veut résoudre l'équation $(E)$ : $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$

1. On pose $X = x^2$.
   Écrire l'équation $(E)$ en fonction de $X$.
2. Résoudre l'équation d'inconnue $X$.
3. En déduire les quatre solutions de $(E)$.

## V

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ et soit $g$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 5$.

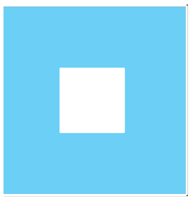
1. Pourquoi -3 est-il une valeur interdite pour $f$ ?
2. On donne la courbe représentative de $f$.
   Tracer sur ce graphique la courbe représentative de $g$.



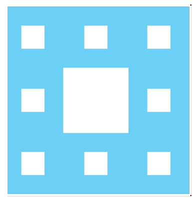

3. Résoudre l'inéquation $f(x) \geqslant g(x)$.
   En déduire la position relative des deux courbes (c'est-à-dire trouver pour quelles valeurs de $x$ $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ et en dessous).

## VI Tapis de Sierpinski

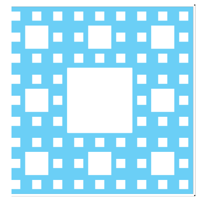
Dans un lointain futur, sur la planète Thêta, vivent Horion et Apolline au sein d'une colonie d'humains, gouvernée avec bienveillance par une I.A. Mais tout n'est pas si paisible sur la planète Thêta…« Le tapis est mité » constate Horion.« Tu pourrais au moins cacher ta joie » s'emporte Apolline qui adorait son tapis laineux.
Le tapis carré de 1 m de côté, ravissant, selon les goûts d'Apolline, hideux selon les critères d'Horion, est effectivement attaqué par des mites. « Il s'agit de mites de l'espèce Waclaw », croit bon de préciser l'I.A. à qui personne n'avait rien demandé, exaspérant davantage Apolline.
Les mites ont leur stratégie; le premier jour, elles s'attaquent à la partie centrale du tapis : si on partage le tapis carré en 9 carrés de même aire, les mites mangent le carré central. Le second jour, elles s'attaquent de la même manière aux 8 carrés autour du carré manquant, et ainsi de suite pour les autres jours.
(Remarque : la figure « limite » qu'on obtient ainsi d'appelle le « tapis de Sierpinski », du nom du mathématicien polonais Waclaw Franciszek Sierpinski 1882-1961)



$n = 1$



$n = 2$



$n = 3$

Horion, ravi, commente : « Au final, cela fera un joli tapis en dentelle, et dans quelques jours elles feront des troussi petits qu'on ne les verra plus. ».
Apolline lui répond, furieuse : « Le tapis va disparaître complètement! ». Horion n'en espérait pas tant!
Étudions ces deux affirmations;
Pour tout entier $n \geqslant$, on désigne par $c_n$ la longueur, en m, du côté d'un trou carré qui apparaît au $n$-ième jour et $A_n$ l'aire, en m$^2$, de la surface totale mangée par les mites après $n$ jours.

1. Montrer que $(c_n)$ est une suite géométrique et, pour tout entier $n \geqslant$, exprimer $c_n$ en fonction de $n$.
2. Quelle est la valeur de $A_1$ ?
   Vérifier ensuite que $A_2 = \dfrac{17}{81}$
3. Chaque jour, les mites mangent $\dfrac{1}{9}$ de la partie du tapis restante.
   Montrer que, pour tout entier $n \geqslant$, on a $A_{n+1} = \dfrac{8}{9}A_n + \dfrac{1}{9}$.
4. (a) Pour tout entier $n \geqslant$, on pose $B_n = A_n - 1$. Montrer que $(B_n)$ est une suite géométrique.
   (b) Pour tout entier $n \geqslant$, en déduire l'expression de $B_n$, puis de $A_n$ en fonction de $n$.
5. (a) À partir de combien de jours la surface du tapis sera-t-elle mangée à 99 % au moins? (À trouver avec une calculatrice)
   (On admet que $A_n$ tend vers 1 lorsque $n$ tend vers $+\infty$ et que la suite $(A_n)$ est croissante)
   (b) Sachant qu'à une distance supérieure à 1 m, un oeil humain normalement constitué ne peut distinguer de détail sur un tapis inférieur à 0,5 mm, au bout de combien de jours ne verra-t-on plus les nouveaux trous formés? (À trouver à la calculatrice)
   (On admet que $c_n$ tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $+\infty$.)
6. Que penser de chacune des affirmations de Horion et d'Apolline?