Spécialité 1re Correction du DM nº 2

I

On dispose d'un crédit de 414 000 euros pour atteindre dans un désert une nappe souterraine . Le coût du forage est fixé à 1 000 euros pour le premier mètre creusé, 1 200 pour le deuxième, 1 400 pour le troisième et ainsi de suite en augmentant de 200 euros par mètre creusé.
On pose $u_0 = 1000$, $u_1 = 1200\dots$
u_n désigne donc le coût en euros du (n+1)-ième mètre creusé.

1. (a) On a $u_1 = 1200$, $u_2 = 1400$, $u_3 = 1600$, $u_4 = 1800$ et $\boxed{u_5 = 2000}$.

   (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{u_{n+1} = u_n + 200}$

   (c) On en déduit que la suite (u_n) est arithmétique de raison $\boxed{r = 200}$ et de premier terme $\boxed{u_0 = 1000}$.

   (d) Alors, pour tout n, $u_n = u_0 + nr = 1000 + 200n$; $\boxed{u_n = 200n + 1000}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ (avec $n \neq 0$) , on désigne par S_n le coût total en euros d'un puits de n mètres.
   On a : $S_n = u_0 + \cdots + u_{n-1} = n \times \left(\dfrac{u_0 + u_{n-1}}{2}\right) = n \times \dfrac{(1000 + 200(n-1) + 1000)}{2} = n \times \dfrac{200n + 1800}{2}$
   $= n \times \dfrac{\cancel{2}(100n + 900)}{\cancel{2}} = (100n + 900) = 100n(n+9)$.
   $\boxed{S_n = 100n(n+9)}$.

3. On cherche pour quelle valeur de n on a : $S_n = 414000$.
   $S_n = 414000 \Leftrightarrow 100n(n+9) = 414000 \Leftrightarrow n(n+9) = 4140 \Leftrightarrow n^2 + 9n = 4140$
   $\Leftrightarrow \boxed{n^2 + 9n - 4140 = 0}$.
   $\Delta = 9^2 - 4 \times 1 \times (-4140) = 81 + 16560 = 16641 > 0$.
   L'équation a deux solutions :
   $n_1 = \dfrac{-9 - \sqrt{16641}}{2} < 0$ (donc solution à exclure)
   $n_2 = \dfrac{-9 + \sqrt{16641}}{2} = \dfrac{-9 + 129}{2} = 60$.
   La profondeur maximale que l'on peut atteindre avec u crédit de 414 000 € et de 60 m.

II

On considère deux suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} \text{ et } v_n = \frac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2}.$$

1. On définit la suite (w_n) par $w_n = u_n + v_n$.

   (a) Pour tout n, $w_n == \dfrac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} + \dfrac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2} = \dfrac{\cancel{2} \times 3^n}{\cancel{2}} = \boxed{3 \times 2^n}$.
   (w_n) est donc géométrique de raison 2 et de premier terme terme $w_0 = 3$.
   Comme 3>1 et $w_0 > 0$, la suite (w_n) est croissante.

   (b) $w_n = \boxed{3 \times 2^n}$ (voir question précédente)

2. On définit la suite (t_n) par $t_n = u_n - v_n$.

   (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \dfrac{3 \times 2^n - 4n + 3}{2} - \dfrac{3 \times 2^n + 4n - 3}{2} = \dfrac{3 \times 2^n - 4n + 3 - (3 \times 2^n + 4n - 3)}{2}$
   $= \dfrac{\cancel{3 \times 2^n} - 4n + 3 - \cancel{3 \times 2^n} - 4n + 3}{2} = \dfrac{\cancel{2}(-4n + 3)}{\cancel{2}} = \boxed{-4n + 3}$.
   C'est une fonction affine de n donc (t_n) est arithmétique de raison $\boxed{r = -4}$.
   $r = -4 < 0$ donc (t_n) est **décroissante**.

(b) $\boxed{t_n = -4n+3}$ (voir question précédente)

3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n + t_n = (u_n + v_n) + (u_n - v_n) = 2u_n$ donc
$\boxed{u_n = \frac{1}{2}(w_n + t_n) = \frac{1}{2}\left(3 \times 2^n - 4n + 3\right)}$

4. De même, $w_n - t_n = 2v_n$ donc $v_n = \frac{1}{2}(w_n - t_n)$.

   Alors : $\boxed{v_n = \frac{1}{2}\left(3 \times 2^n + 4n - 3\right)}$.

III

1. (a) $(x-u)(x-v) = 0 \Leftrightarrow x^2 - (u+v)x + uv = 0$ soit $x^2 - Sx + P = 0$ en posant $S = u+v$ et $P = uv$.

   (b) Les réels u et v étant les racines du polynôme $(x-u)(x-v)$, ils sont aussi les solutions de l'équation $x^2 - Sx + P = 0$.

2. (a) S'il existe deux nombres réels u et v dont le produit est 6 et la somme 4, alors ces deux nombres réels sont les racines De l'équation $x^2 - 4x + 6$.
   Le discriminant est $\Delta = (-4)2 - 4 \times 1 \times 6 = -8$.
   $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution, donc il n'existe aucun nombres u et v dans $\mathbb{R}$ dont la somme vaut 4 est le produit 6.

   (b) S'il existe deux nombres réels u et v dont le produit est 6 et la somme 8, alors ces deux nombres réels sont les solutions de l'équation $x^2 - 8x + 6 = 0$.
   ' Le discriminant est $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 40$.
   $\Delta > 0$, l'équation admet deux solutions :
   $u = \frac{8-\sqrt{40}}{2} = \frac{8-2\sqrt{10}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(4-\sqrt{10}\right)}{\cancel{2}} = \boxed{4-\sqrt{10}}$.
   $v = \frac{8+\sqrt{40}}{2} = \frac{8+2\sqrt{10}}{2} = \frac{\cancel{2}\left(4+\sqrt{10}\right)}{\cancel{2}} = \boxed{4+\sqrt{10}}$.
   Les deux nombres dont la somme vaut 8 et le produit vaut 6 sont $4-\sqrt{10}$ et $4+\sqrt{10}$.

3. **Algorithme**

Saisir S et P.
Calculer $\Delta = S^2 - 4P$
Si $\Delta < 0$
retourner « pas de solution réelle »
Sinon si $\Delta = 0$
retourner $\frac{S}{2}$
Sinon
retourner $\frac{S-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $\frac{S+\sqrt{\Delta}}{2}$
FinSi

IV Équation bicarrée

On veut résoudre l'équation (E) : $x^4 - 9x^2 + 14 = 0$

1. On pose $X = x^2$.
   (E) s'écrit : $X^2 - 9X + 14 = 0$.

2. $\Delta = (-9)^2 - 4 \times 1 \times 14 = 81 - 56 = \boxed{25}$.

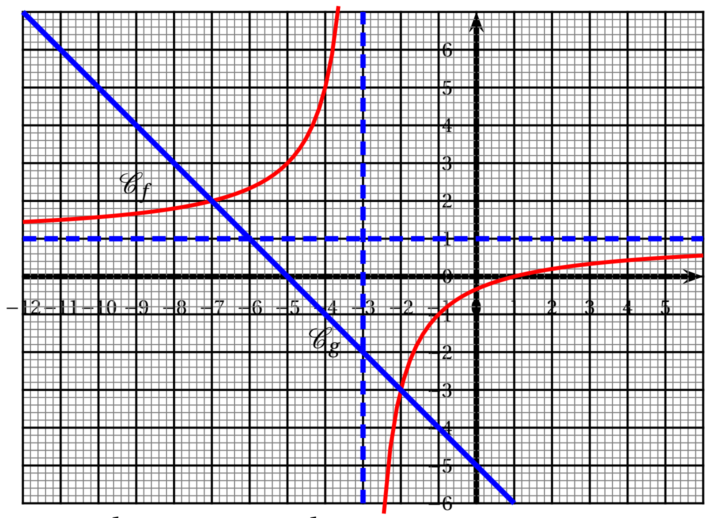
   $\Delta > 0$; l'équation a deux solutions : $X_1 = \frac{9-\sqrt{25}}{2} = 2$ et $X_2 = \frac{9+\sqrt{25}}{2} = 7$.

3. On a $x^2 = X$.
   On résout : $x^2 = 2$ qui a pour solutions $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$ et
   $x^2 = 7$ qui a pour solutions $-\sqrt{7}$ et $\sqrt{7}$.
   Les solutions de (E) sont $\boxed{\mathscr{S} = \{-\sqrt{7}\,;\, -\sqrt{2}\,;\, \sqrt{2}\,;\, \sqrt{7}\}}$

V

Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \dfrac{x-1}{x+3}$ et soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x-5$.

1. -3 est une valeur interdite pour f car on ne peut pas diviser par 0.
2. On donne la courbe représentative de f.
   Tracer sur ce graphique la courbe représentative de g.



3. Pour tout $x \neq -3$, $f(x) \geqslant g(x) \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x+3} \geqslant -x-5 \leqslant \dfrac{x-1}{x+3} - (-x-5) \geqslant 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-1)}{x+3} + x + 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)+(x+5)(x+3)}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1+x^2+3x+5x+15}{x+3} \geqslant 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2+9x+14}{x+3} \geqslant 0.$

- Signe de $x^2+9x+14$: $\Delta = 9^2 - 4 \times 1 \times 14 = 25 > 0$.
  L'expression a deux racines : $x_1 = \dfrac{-9-\sqrt{25}}{2} = -7$ et $x_2 = \dfrac{-9+\sqrt{25}}{2} = -2$.
  $x^2+9x+14$ est positif (du signe du coefficient de x^2) à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.
- $x+3 > 0 \Leftrightarrow x > -3$
- On renseigne un tableau de signes :

x	$-\infty$		-7		-3		-2		$+\infty$
$x^2+9x+14$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
$x+3$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2+9x+14}{x+3}$		$-$	0	$+$	‖	$-$		$+$	

$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ si, et seulement si, $f(x) \geqslant g(x)$ donc si, et seulement si, $f(x) - g(x) \geqslant 0$.
$\mathscr{C}_f$ est au-dessus de $\mathscr{C}_g$ pour $\boxed{x \in [-7\,;\, -3[\cup [2\,;\, +\infty[}$ et en dessous pour $\boxed{x \in]-\infty\,;\, -7] \cup]-3\,;\, 7]}$.

VI

1. Il est clair que, par construction, on a $c_{n+1} = \dfrac{1}{3} c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   La suite (c_n) est donc géométrique, de raison $q = \dfrac{1}{3}$ et de premier terme $c_0 = 1$.

   On en déduit $\boxed{c_n = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. $A_1 = c_1^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

   À l'étape suivante, les mites mangent $\frac{1}{9}$ de ce qui reste, donc $\frac{1}{9}\left(1-\frac{1}{9}\right) = \frac{1}{9} \times \frac{8}{9} = \frac{8}{81}$. La surface totale mangée est alors $A_2 = \frac{8}{81} + \frac{1}{9} = \boxed{\frac{17}{81}}$.

3. Chaque jour, les mites mangent $\frac{1}{9}$ de la partie du tapis restante.

   À l'étape $n+1$, les mites mangent $\frac{1}{9}$ de la partie non encore mangée, donc $\frac{1}{9}(1-A_n)$.

   La partie mangée est donc $\frac{1}{9}(1-A_n) + A_n = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}$.

   On en déduit que, pour tout n, $\boxed{A_{n+1} = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9}}$

4. (a) Pour tout entier $n > 1$, on pose $B_n = A_n - 1$. Pour tout $n > 1$, $B_{n+1} = A_{n+1} - 1 = \frac{8}{9}A_n + \frac{1}{9} - 1 = \frac{8}{9}A_n - \frac{8}{9} = \frac{8}{9}(A_n - 1) = \frac{8}{9}B_n$ donc $\boxed{B_{n+1} = \frac{8}{9}B_n}$.

   La suite (B_n) est donc géométrique, de raison $q = \frac{8}{9}$ et de premier terme $B_1 = A_1 - 1 = -\frac{8}{9}$.

   (b) On en déduit que, pour tout $n > 1$, $B_n = B_1 \times q^{n-1} = -\frac{8}{9} \times \left(\frac{8}{9}\right)^{n-1} = -\left(\frac{8}{9}\right)^n$.

   Alors : $\boxed{A_n = 1 + B_n = 1 - \left(\frac{8}{9}\right)^n}$

5. (a) $-1 < \frac{8}{9} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n = 1$, donc A_n va finir par dépasser 99 %.

   $A_n \geqslant 99\,\% = 0{,}99 \Leftrightarrow \left(\frac{8}{9}\right)^n \leqslant 0{,}01$.

   En cherchant un tableau de valeurs de la suite (A_n), on trouve que n doit être supérieur à 40.

   Au bout de 40 jours, les mites auront mangé au moins 99 % du tapis.

   (b) On cherche pour quelles valeurs de n la longueur c_n est inférieure ou égale à 0,5 mm = 0,0005 m.

   On trouve à la calculatrice qu'il faut avoir $n \geqslant 7$.

6. Les trous vont effectivement devenir tellement petits qu'on ne les verra plus mais le tapis va finir par disparaître puisque la limite de (A_n) est 1.

   Horion et Apolline ont tous les deux raison.