Rappels sur la loi binomiale

I Schéma de Bernoulli

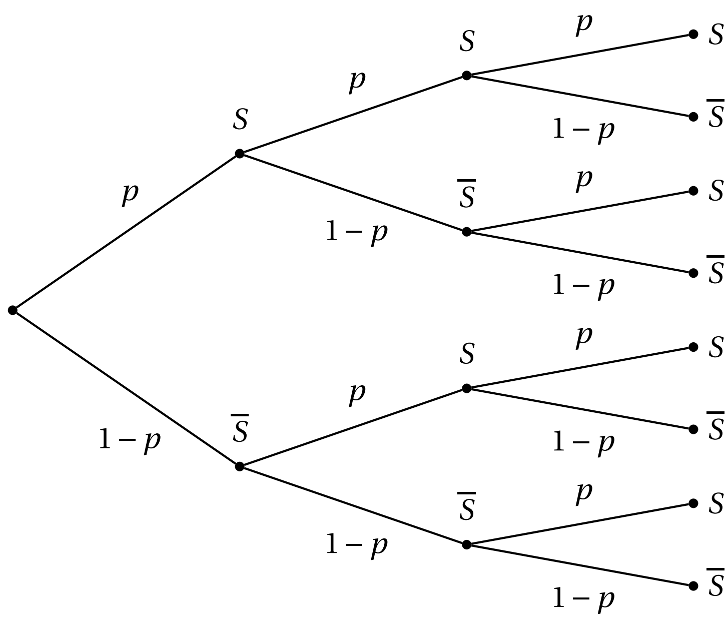
Définition

On appelle épreuve de Bernoulli une expérience aléatoire à deux issues, appelées en général succès et échec.
Si p est la probabilité d'un succès, la probabilité d'un échec est $q = 1 - p$.

On appelle schéma de Bernoulli une répétition de n fois la même épreuve de Bernoulli, les épreuves successives étant indépendantes.
Les paramètres sont n (nombre d'épreuves) et p, probabilité d'un succès

On peut représenter la situation par un arbre pondéré.

Exemple avec trois épreuves :



On a : $p\left(S \cap \overline{S} \cap S\right) = p(1-p)p = p^2(1-p)$

II Loi binomiale

II.1 Retour sur l'exemple précédent

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours des trois épreuves. On a :

- $p(X=3) = p(SSS) = p^3$
- $p(X=2) = p\left(\left(SS\overline{S}\right) \cup \left(S\overline{S}S\right) \cup \left(\overline{S}SS\right)\right) = 3p^2q$
- $p(X=1) = p\left(\left(S\overline{S}\overline{S}\right) \cup \left(\overline{S}S\overline{S}\right) \cup \left(\overline{S}\overline{S}S\right)\right) = 3pq^2$
- $p(X=0) = q^3$

II.2 Cas général

Soit n un entier naturel. Imaginons la répétition de n épreuves identiques de Bernoulli.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès au cours des n épreuves.
Soit k un entier ($0 \leqslant k \leqslant n$).
Chaque chemin qui compte k succès et donc $n-k$ échecs a une probabiité égale à $p^k(1-p)^{n-k}$.
$\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$ compte le nombre de positions possibles des k succès parmi les n positions possibles de S et $\overline{S}$, donc le nombre de chemins contenant k succès .

Propriété

On dit que X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(n\,;\,p)$. (on peut écrire $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n\,;\,p)$).

Pour tout k avec $0 \leqslant k \leqslant n$, $p(X=k) = \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} p^k(1-p)^{n-k}$

II.3 Espérance

Propriétés (admises)

- $E(X) = np$ (espérance)
- $V(X) = npq$ (variance) où $q = 1-p$
- $\sigma(X) = \sqrt{npq}$ (écart-type).

III Exemple : exercice du bac blanc

Une jardinerie vend de jeunes plants d'arbres qui proviennent de trois horticulteurs.
On a trouvé (première partie) que la probabilité d'avoir un conifère est $p = 0,525$.

On choisit au hasard un échantillon de 10 arbres dans le stock de cette jardinerie. On suppose que ce stock est suffisamment important pour que ce choix puisse être assimilé à un tirage avec remise de 10 arbres dans le stock.

On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de conifères de l'échantillon choisi.

1. Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. Quelle est la probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères?
   On arrondira à 10^{-3}.
3. Quelle est la probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus?
   On arrondira à 10^{-3}.
4. Quelle est l'espérance de cette loi?
   Interpréter le résultat.

Correction On a répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,525$.

On a alors $p(X=k) = \binom{10}{k} p^k (1-p)^{n-k}$

$= \boxed{\binom{10}{k} \times 0,525^k \times 0,475^{10-k}}$.

1. La probabilité que l'échantillon prélevé comporte exactement 5 conifères est :
   $p(X=5) = \binom{10}{5} \times 0,525^5 \times 0,475^5$
   $\approx \boxed{0,243 \text{ à } 10^{-3} \text{ près}}$.
2. La probabilité que cet échantillon comporte au moins deux arbres feuillus est :
   $p(X \leqslant 8) = 1 - [p(X=9) + p(X=10)] \approx \boxed{0,984}$.
   On peut aussi calculer directement $p(X \leqslant 8)$ avec la fonction BinomialFRep de la calculatrice (menu Distrib).
   On tape BinomialFrep(n,p,k) pour calculer $p(X \leqslant k)$.

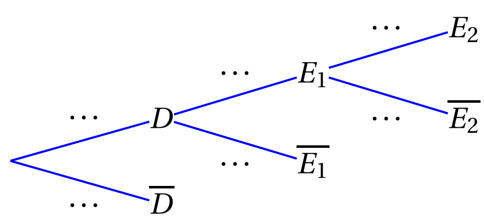
IV Exemple : Bac Métropole juin 2012

IV.1 Énoncé

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40 % des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70 % d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25 % des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.
   On considère les évènements suivants :
   — D : « Le candidat est retenu sur dossier »,
   — E_1 : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,
   — E_2 : « Le candidat est recruté ».

   (a) Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.

   (b) Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

   (c) On note F l'évènement « Le candidat n'est pas recruté ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement F est égale à $0,93$.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à $0,07$.

On désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

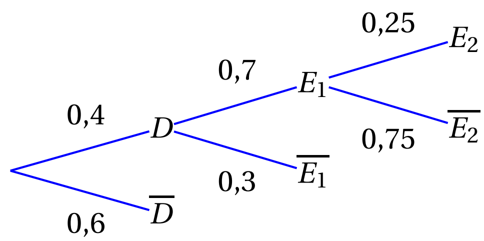
(a) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

(b) Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à 10^{-3}.

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à $0,999$?

IV.2 Correction

1. (a)



(b) On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

(c) Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :
$p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap \overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93$.
D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1 - p(F) = 1 - 0,93 = 0,07$.
On peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :
$p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.
D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.

2. (a) Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à $0,07$. La variable X suit donc une loi binomiale $(\mathscr{B}, n = 5,\ p = 0,07)$.

(b) On a $p(X = 2) = \binom{5}{2} 0,07^2 \times 0,93^3 = 10 \times 0,07^2 \times 0,93^3 \approx 0,0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.

La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{0}{n} \times 0,07^0 \times 0,93^n = 0,93^n$.

La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1 - 0,93^n$.
Il faut donc résoudre l'inéquation :
$1 - 0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n \ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln)
$\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$.
Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx 95,1$.
Il faut donc traiter au moins 96 dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.