Exercices sur les suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

I

Dans cet exercice, les suites sont toutes arithmétiques.

1. 1) On a $u_0 = 7$ et $r = 3$. Déterminer u_{35}.
2. On a $u_1 = 3$ et $r = -3$. Déterminer u_{16}.
3. On a $u_4 = 23$ et $u_{32} = 163$. Déterminer la raison.
4. On a $u_4 = 1$ et $u_9 = 4$. Déterminer u_{21}.
5. On a $u_{100} = 650$ et $r = 8$. Déterminer u_0.

II Suite arithmétique auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n^2}$.
Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = u_n^2$.

1. 1) Montrer que (v_n) est une suite arithmétique.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

III Suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1}$.
On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$. (Remarque : cela se démontrerait par récurrence).
On définit la suite (v_n) par $v_n = \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique, dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer v_n en fonction de n.
3. En déduire une expression de u_n en fonction de n.
4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul :
   $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{3}$.
5. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

IV

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ telle que $u_1 = -1$.

1. Calculer u_{100}.
2. Déterminer à partir de quel rang N on a $u_N \geqslant 50$.
3. Calculer la somme $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{25} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=25} u_i$.
4. Calculer la somme $S' = u_{26} + u_{27} + \cdots + u_{50} = \displaystyle\sum_{i=26}^{i=50} u_i$.

V Bac Réunion 2008

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } n \geqslant 1,\ u_n = \left(1 + \frac{2}{n}\right) u_{n-1} + \frac{6}{u_n}.$$

1. (a) Calculer u_1.
   (b) Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   À partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a : $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.

Suites géométriques

VI

Les suites suivantes sont-elles géométriques ? Si oui, préciser leur premier terme et leur raison.

a) $u_n = 2^n$

b) $u_n = -4n$

c) $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.

VII

Dans cet exercice, toutes les suites sont géométriques.

1. On a $u_0 = 8$ et $q = \dfrac{1}{2}$. Déterminer u_7.
2. On a $u_1 = 243$ et $q = \dfrac{1}{3}$. Déterminer u_9
3. On a $u_1 = 12$ et $u_5 = 3\,072$. Déterminer les valeurs possibles pour q.

VIII

En 1999, un parking de 2000 places est construit.
On observe une fréquentation moyenne de 250 véhicules par jour en 1999 (calculée avec 365 jours par an).
Les spécialistes prévoient une augmentation moyenne de 10 % par an de la fréquentation moyenne quotidienne par rapport à l'année précédente (cette prévision est vraie pour toutes les années).
On pose f_0 la fréquentation moyenne quotidienne en 1999, f_n étant la fréquentation moyenne quotidienne de l'année $1999+n$.

1. Calculer f_1 et f_2 .

2. Justifier que la suite (f_n) est une suite géométrique dont on donnera la raison q.

3. Exprimer f_n en fonction de n.

4. Calculer la fréquentation moyenne en 2018. On arrondira le résultat à l'entier près par excès.

IX Suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. (a) Calculer u_0, u_1 et u_2 .

   (b) La suite (u_n) est-elle arithmétique, géométrique ?

   Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.
   On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

   (a) Calculer v_0 ,v_1 et v_2.

   (b) Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

2. Exprimer v_n en fonction de n. En déduire une expression de u_n en fonction de n.

X (D'après sujet de Bac Pro Plasturgie Session juin 2007)

Afin d'atteindre la température de démoulage, on refroidit le moule par un liquide caloporteur. Le technicien calcule la température de refroidissement du moule à partir des données suivantes :

- la température initiale du moule est 230 ˚C ;
- à chaque seconde, la température du moule diminue de 2,1 %.

Soit T_1 la température initiale du moule exprimée en ˚C. ($T_1 = 230$).
Soit T_2 la température du moule au bout d'une seconde.
Plus généralement, on note T_n la température, exprimée en ˚C, au bout de $(n-1)$ secondes.

1) Calculer la température T_2 du moule au bout d'une seconde et la température T_3 au bout de deux secondes. Ne pas arrondir les résultats.
2) Montrer que T_1, T_2, ..., T_n sont les premiers termes d'une suite géométrique.
3) Calculer la raison q de la suite (T_n).
4) En prenant $q = 0{,}979$, calculer la température T_{57} du moule au bout de 56 secondes.
   Arrondir le résultat à l'unité.
5) Au bout de combien de secondes la température atteint-elle 70 ˚C ?