Spécialité mathématiques : correction du devoir sur feuille n° 2

Exercice I (5 points)

Le 1er septembre 2015, un ensemble scolaire compte 3 000 élèves.
Une étude statistique interne a montré que chaque 1er septembre :

- 10 % de l'effectif quitte l'établissement ;
- 250 nouveaux élèves s'inscrivent.

On cherche à modéliser cette situation par une suite (u_n) où, pour tout entier naturel n, u_n représente le nombre d'élèves le 1er septembre de l'année $2015+n$.

1) En septembre 2005, il y 3 000 élèves donc $u_0 = 3000$.
Le coefficient multiplicateur associé à une baisse de 10 % est $C = 1 - \dfrac{10}{100} = 0,9$.
On en déduit $\boxed{u_{n+1} = 0,9u_n + 250}$ puisque 250 nouveaux élèves d'inscrivent.

2) Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = u_n - 2500$.

   (a) Pour tout n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2500 \\ &= (0,9u_n + 250) - 2500 \\ &= 0,9u_n - 2250 \\ &- 0,9\left(u_n - \frac{2250}{0,9}\right) \\ &= 0,9\,(u_n - 2500) \\ &= 0,9v_n \end{aligned}$$

   Pour tout n : $v_{n+1} = 0,9v_n$.
   La suite (v_n) est géométrique de raison $q = 0,9$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 2500 = 3000 - 2500 = 500$.

   (b) On en déduit que, pour tout n : $v_n = v_0 \times q^n$ donc :

$$\boxed{v_n = 500 \times 0,9^n}$$

   Comme $u_n = v_n + 2500$, on peut en déduire que pour tout entier naturel n,

$$\boxed{u_n = 500 \times 0,9^n + 2500.}$$

3) Pour tout n, $u_{n+1} - u_n$
$= \left[500 \times 0,9^{n+1} + 2500\right] - \left[500 \times 0,9^n + 2500\right]$
$= 500 \times 0,9 \times 0,9^n - 500 \times 0,9^n$
$= 500 \times 0,9^n\,(0,9-1) = 500 \times 0,9^n \times (-0,1)$
$\boxed{= -50 \times 0,9^n < 0}$.
Pour tout n, $u_{n+1} - u_n < 0$: la suite (u_n) est décroissante.

4) La capacité optimale d'accueil est de 2 800 élèves. Ainsi, au 1er septembre 2015, l'ensemble scolaire compte un sureffectif de 200 élèves.
On veut déterminer à partir de quelle année, le contexte restant le même, l'ensemble scolaire ne sera plus en sureffectif; cela arrivera la première année pour laquelle l'effectif sera inférieur ou égal à 2 800.
Comme la suite (u_n) est décroissante, ce sera également le cas pour les années qui suivront.
Voici un algorithme qui répond au problème :

Variables	n entier et u réel
Initialisation	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 3 000
Traitement	Tant que $u > 2800$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,9 \times u + 250$
	Fin de Tant que
Sortie	Afficher n

Exercice II (3 points)

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
Soit a un nombre appartenant à I et h un nombre non nul tel que $a+h \in I$.

1) Par définition : $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ donc pour h proche de 0, $f'(x) \approx \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$, d'où :
$f(a+h) - f(a) \approx f'(a)h$ et donc : $\boxed{f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h}$.

2) (a) $f(x) = x^2$ donc $f'(x) = 2x$.
On applique la formule précédente avec $a = 1$:
$f(1+h) = (1+h)^2 \approx f(1) + f'(1)h = 1^2 + 2 \times 1 \times h$
donc $\boxed{f(1+h) = (1+h)^2 \approx 1 + 2h}$

   (b) On en déduit :

   - $1,005^2 \approx 1 + 2 \times 0,005 = \boxed{1,01}$ avec $h = 0,005$
   - $0,999^2 = f(1-0,001) \approx 1 - 2 \times 0,001 = 1 - 0,002 = \boxed{0,998}$
   - La valeur exacte de $f(1,005)$ est $f(1,005) = 1,005^2 = 1,010025$ donc nous avons truffé une bonne approximation.
   - La valeur exacte de $f(0,999)$ est $f(0,999) = 0,999^2 = 0,998001$ donc nous avons trouvé une bonne approximation.

3) On considère la fonction racine carrée $g : x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $]O\,;\,+\infty[$.
$g(x) = \sqrt{x}$; $g'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.
Pour h proche de 0, on a donc : $g(1+h) \approx g(1) + g'(1)h = \sqrt{1} + \dfrac{1}{2\sqrt{1}} \times h = \boxed{1 + \dfrac{h}{2}}$.

4) On en déduit :

- $\sqrt{1,02} \approx 1 + \dfrac{0,02}{2} = \boxed{1,01}$
- $\sqrt{0,96} \approx 1 - \dfrac{0,04}{2} = \boxed{0,98}$

Remarque : cela bien de ce que localement, on approximativement la courbe en un point par sa tangente en ce point.

Exercice III (4 points)

Le plan est rapporté à un repère $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$ orthonormé. On considère dans ce repère la parabole $\mathscr{P}$ d'équation $y = -\dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$.
On pose $f(x) = -\dfrac{1}{2}x^2 + x - 1$.

1. Représentation graphique en fin d'exercice.
Le sommet a pour coordonnées $\left(1\,;\,-\dfrac{1}{2}\right)$ et cette parabole a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = 1$.
On calcule les coordonnés de quelques points d'abscisses supérieures à 1 et on complète la courbe par symétrie.

x	1	1,5	2	2,5	3	4
$f(x)$	-0,5	0,625	-1	-1,625	-2,5	-5

2. L'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ en a est
$y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
En 0 : $y = f'(0)x + f(0)$.

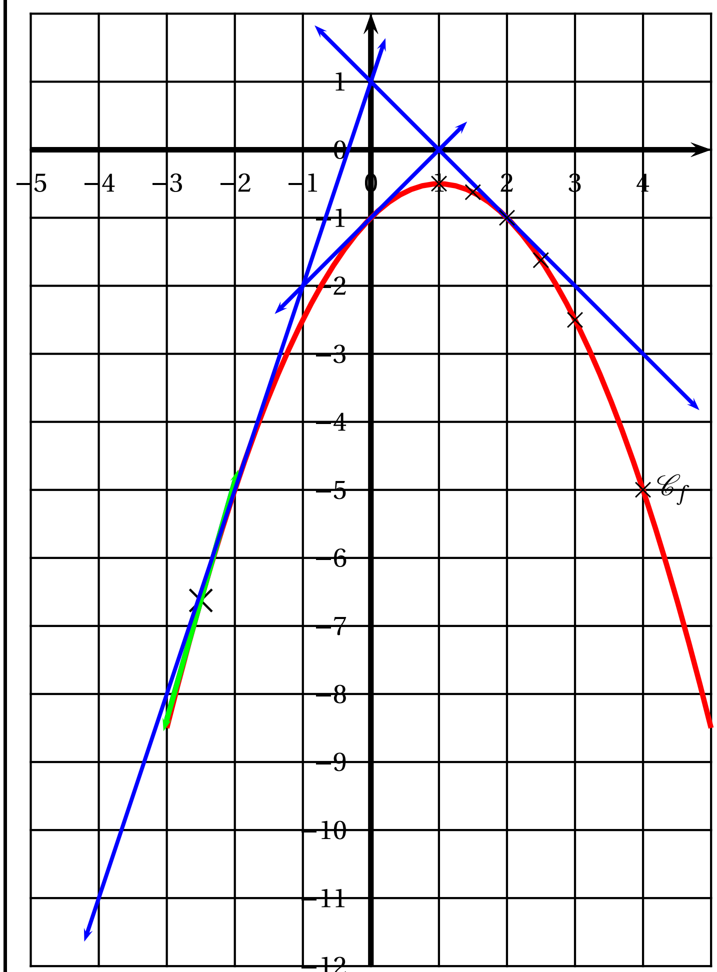
- $f(0) = -1$
- $f'(x) = -x + 1$ donc $f'(0) = 1$

La tangente à $\mathscr{C}_f$ en 0 est : $\boxed{y = x - 1}$. (représentée sur la courbe).

3. On cherche a tel que $f'(a) = \dfrac{7}{2}$ donc $-a + 1 = \dfrac{7}{2}$ qui a pour solution $a = 1 - \dfrac{7}{2} = \boxed{-\dfrac{5}{2}}$.

4. Soit a un nombre réel. L'équation de la tangente en a est :
$y = f'(a)(x-a) + f(a) \Leftrightarrow y = (-a+1)(x-a) - \dfrac{a^2}{2} + a - 1$
$\Leftrightarrow y = (-a+1)x + a^2 - a - \dfrac{a^2}{2} + a - 1$
$\Leftrightarrow \boxed{y = (-a+1)x + \dfrac{a^2}{2} - 1}$.
On cherche les tangentes passant par $B(0\,;\,1)$.
Les coordonnées de B doivent vérifier l'équation de la tangente, donc :
$1 = \dfrac{a^2}{2} - 1 \Leftrightarrow 2 = \dfrac{a^2}{2} \Leftrightarrow a^2 = 4 \Leftrightarrow a = \pm 2$.
Les tangentes en -2 et 2 à $\mathscr{C}_f$ passent par B.
Elles ont pour équations :

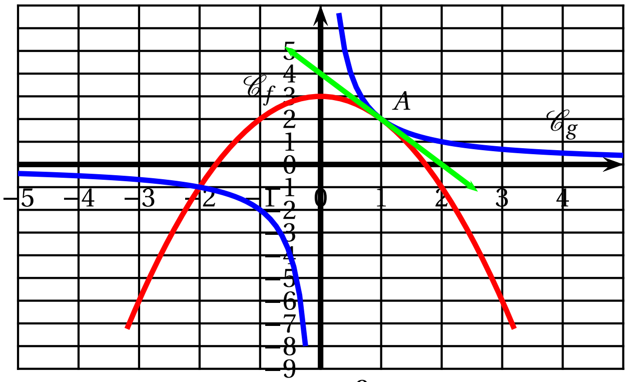
- Pour $a = -2$: $\boxed{y = 3x + 1}$
- Pour $a = 2$: $\boxed{y = -x + 1}$



Exercice IV (4 points)

Soient $f : x \longmapsto -x^2 + 3$ une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et $g : x \longmapsto \dfrac{2}{x}$ une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.
On appelle $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormal $\left(O\,;\,\vec{i}\,;\,\vec{j}\right)$.

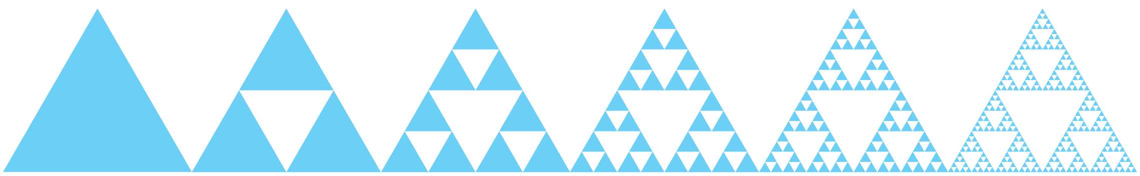
1. Courbes :



2. • $f(1)=3-1^2=2$ et $g(1)=\dfrac{2}{1}=2$ donc $A(1\ ;\ 2)$ appartient à $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$
   • $f'(x)=-2x$ donc $f'(1)=-2$
   • $g(x)=2\times\dfrac{1}{x}$ donc $g'(x)=2\times\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{2}{x^2}$. Alors : $g'(1)=-2$
   • En A, f et g admettent lue même nombre dérivé donc les deux courbes admettent la même tangente en A.
   • L'équation de la tangente T en A est : $y=f'(1)(x-1)+f(1) \Leftrightarrow y=-2(x-1)+2$ $\Leftrightarrow \boxed{y=-2x+4}$

3. • Position de T par rapport à $\mathscr{C}_f$:
   $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(x)-(-2x+4)=3-x^2+2x-4=-x^2+2x-1$ $=-\left(x^2-2x+1\right)=\boxed{-(x-1)^2\leqslant 0}$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)-(-2x+4)\leqslant 0$ donc $\mathscr{C}_f$ est en dessous de la tangente T en A.
   • Position de T par rapport à $\mathscr{C}_fg$:
   $\forall x\neq 0$, $g(x)-(-2x+4)=\dfrac{2}{x}+2x-4=\dfrac{2x^2-4x+2}{x}$ $=\dfrac{2\left(x^2x+1\right)}{x}=\boxed{\dfrac{2(x-1)^2}{x}}$ qui est du signe de x, donc négatif pour $x<0$ et positif pour $x>0$.
   $\mathscr{C}_g$ est en dessous le tangente T pour $x<0$ et au-dessus pour $x>0$.

Exercice V (4 points)Triangle de Sierpinski



a) On note a_n le nombre de triangles coloriés en blanc lors de la n-ième étape.
On a : $a_1=1$; $a_2=3$; $a_3=9$ et, de manière plus générale, $a_{n+1}=3a_n$.

b) La suite (a_n) est géométrique, de premier terme $a_1=1$ et de raison $q=3$.
Par conséquent : $a_n=a_1\times q^{n-1}=\boxed{3^{n-1}}$.
Alors : $a_{15}=1\times 3^{14}=\boxed{3^{14}=4782969}$.
Le nombre de triangles coloriés en blanc lors de la quinzième étape est $\boxed{4782969}$.

c) Le nombre total de triangles coloriés en blanc après quinze étapes est :
$a_1+a_2+\cdots+a-15=1+3+\cdots+3^{14}=\dfrac{3^{15}-1}{3-1}=\dfrac{3^{15}-1}{2}$ $=\boxed{7174453}$

d) Notons b_n la surface des triangles coloriés en blanc lors de la n-ième étape.
On a :
• $b_1=\dfrac{1}{4}$
• $b_2=3\times\dfrac{1}{16}$ (car l'aire de chaque nouveau triangle colorié est celle du triangle de l'étape précédente divisée par 4)
• $b_3=9\times\dfrac{1}{64}$
• Plus généralement : $b_n=a_n\times\dfrac{1}{4^n}=3^{n-1}\times\dfrac{1}{4^n}$ $=\boxed{\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}}$.
(b_n) est une suite géométrique, de premier terme $b_1=\dfrac{1}{4}$ et de raison $q'=\dfrac{3}{4}$.

e) Lors de la septième étape, la surface coloriée en blanc est $b_7=\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{3}{4}\right)^7=\boxed{\dfrac{729}{16384}\approx 0.045}$ soit $\boxed{4,45\,\%}$

f) La surface totale coloriée en blanc de la pièce après la septième étape est :
$b_1+b_2+\cdots+b_7=b_1\times\dfrac{1-q'^6}{1-q'}=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^7}{1-\frac{3}{4}}$ $=\boxed{\dfrac{14197}{16384}\approx 0.867}$ soit environ 86,7 %.

g) Au bout de n étapes, la surface coloriée en blanc est :
$b_1+b_2+\cdots+b_n=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1-\left(\frac{3}{4}\right)^n}{1-\frac{3}{4}}=\boxed{1-\left(\dfrac{3}{4}\right)^n}$ qui tend vers 1 lorsque n tend vers $+\infty$.
La proportion de l'aire de départ qui reste en bleu tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.