Correction des exercices sur les suites arithmétiques et géométriques

Suites arithmétiques

I

Dans cet exercice, les suites sont toutes arithmétiques.

1. 1) On a $u_0=4$ et $r=2$.On sait que, pour tout n, $u_n=u_0+nr$ donc $u_{35}=u_0+35r=4+35\times 2=\boxed{74}$.
2. On a $u_1=3$ et $r=-2$. De même, $u_n=u_p+(n-p)r$ donc $u_{17}=u_1+16r=3+16\times(-2)=3-32=\boxed{-29}$.
3. On a $u_2=3$ et $u_{14}=9$. $u_{14}=u_2+12r$ donc $r=\dfrac{u_{14}-u_2}{12}=\dfrac{6}{12}=\boxed{\dfrac{1}{2}}$
4. On a $u_4=1$ et $u_9=4$.
   - Calculons d'abord r : $r=\dfrac{u_9-u_4}{5}=\dfrac{3}{5}$ (en calquant sur le calcul précédent).
   - Alors : $u_{21}=u_9+(21-9)r=4+12\times\dfrac{3}{5}=4+\dfrac{36}{5}=\boxed{\dfrac{56}{5}}$
5. On a $u_{100}=650$ et $r=8$. $u_{100}=u_0+100r$ donc $u_0=u_{100}-100r=\boxed{-150}$

II Suite arithmétique auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=0$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$,
$u_{n+1}=\sqrt{5+u_n^2}$.
Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n\in\mathbb{N}$, par $v_n=u_n^2$.

1. Pour tout n, $v_{n+1}=u_{n+1}^2=\sqrt{5+u_n^2}^{\,2}=5+u_n^2=5+v_n$ donc $\boxed{v_{n+1}=v_n+5}$.
   On en déduit que la suite (v_n) est arithmétique, de raison $\boxed{r=5}$ et de premier terme $v_0=u_0^2=\boxed{0}$.
2. Pour tout n, $v_n=v_0+5n$ donc $\boxed{v_n=5n}$.
3. $v_n=u_n^2$ et $u_n\geqslant 0$ donc $u_n=\sqrt{v_n}=\sqrt{5n}$: $\boxed{u_n=\sqrt{5n}}$

III Suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0=1$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{2u_n+1}$.
On admet que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\neq 0$. (Remarque : cela se démontrerait par récurrence).
On définit la suite (v_n) par $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

1. Pour tout n, $v_{n+1}=\dfrac{1}{u_{n+1}}=\dfrac{2u_n+1}{u_n}=\dfrac{2u_n}{u_n}+\dfrac{1}{u_n}=2+\dfrac{1}{u_n}=2+v_n$.
   Donc : $\boxed{v_{n+1}=v_n+2}$.
   La suite (v_n) est donc arithmétique, de raison $r=2$ et de premier terme $v_0=\dfrac{1}{u_0}=1$.
2. On en déduit : $v_n=v_0+nr=1+2n$ dnc $\boxed{v_n=2n+1}$.
3. $v_n=\dfrac{1}{u_n}$ donc, en calculant leurs inverses, $u_n=\dfrac{1}{v_n}$, donc, pour tout n, $\boxed{v_n=\dfrac{1}{2n+1}}$
4. Cela ne se montre pas par récurrence mais directement.

- $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ donc $u_n > 0$ car $2n+1 \geqslant 1$.
- Pour tout n non nul, $n \geqslant 1 \Rightarrow 2n \geqslant 1 \Rightarrow 2n+1 \geqslant 3 \Rightarrow \dfrac{1}{2n+1} \leqslant \dfrac{1}{3}$ (car la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ est décroisante sur $]0\,;\,+\infty[$).

Par conséquent : $\boxed{0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{3}}$.

5. Pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2(n+1)+1} = \dfrac{1}{2n+3}$; $2n+3 > 2n+1$ donc $\dfrac{1}{2n+3} < \dfrac{1}{2n+1} \Leftrightarrow u_{n+1} < u_n$.
   (u_n) est bien une suite décroissante.

IV

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{2}$ telle que
$u_1 = -1$.

1. $u_{100} = u_1 + 99r = -1 + 99 \times \dfrac{1}{2} = -1 + \dfrac{00}{2} = \boxed{\dfrac{97}{2}}$.
2. $u_n = u_1 + (n_1)r = -1 + \dfrac{n_1}{2}$.
   $u_n \geqslant 50 \Leftrightarrow -1 + \dfrac{n-1}{2} \geqslant 50 \Leftrightarrow \dfrac{n-1}{2} \geqslant 51 \Leftrightarrow n-1 \geqslant 102 \Leftrightarrow \boxed{n \geqslant 103}$.
   On en déduit $\boxed{N = 103}$.
3. $S = u_1 + u_2 + \cdots + u_{25} = \displaystyle\sum_{i=1}^{i=25} u_i = 25 \times \dfrac{u_1 + u_{25}}{2} = 25 \times \dfrac{-1+11}{2} = 125$.
   $\boxed{S = 125}$
4. Calculons : $S' = u_{26} + u_{27} + \cdots + u_{50} = \displaystyle\sum_{i=26}^{i=50} u_i$.
   Cette somme contient 25 termes.
   Donc $S' = 25 \times \dfrac{u_{26} + u_{50}}{2} = 25 \times \dfrac{\frac{23}{2} + \frac{47}{2}}{2} = \dfrac{875}{2}$ donc $\boxed{S' = \dfrac{875}{2}}$

Suites géométriques

V

Les suites suivantes sont-elles géométriques? Si oui, préciser leur premier terme et leur raison.

a) $u_n = 2^n$; pour tout n, $u_{n+1} = 2^{n+1} = 2 \times 2^n = 2u_n$ donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 2$ et de premier terme $u_0 = 1$.

b) $u_n = -4n$: $u_{n+1} = -4(n+1) = -4n - 4 = u_n - 4 = u_n - 4$ donc $(_n)$ est arithmétique, pas géométrique

c) $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{3^n}$.
Pour tout n, $u_{n+1} = \dfrac{2^{n+2}}{3^n+1} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2^n+1}{3^n} = \dfrac{2}{3} u_n$ donc $(_n)$ est géométrique de raison $q = \dfrac{2}{3}$ ey de premier terme $u_0 = 2$.

Remarque :

- (u_n) est arithmétique si, et seulement si, pour tout n, $u_n = an + b$ (fonction. affine de n, la raison est a et le premier terme b)
- (u_n) est géométrique si, et seulement si, pour tout n, $u_n = a \times q^n$ (q est alors la raison et $u_0 = a$)

VI

Dans cet exercice, toutes les suites sont géométriques.

1. On a $u_0 = 8$ et $q = \frac{1}{2}$. Déterminer u_7.

   $u_7 = u_0 q^7 = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^7 = \frac{8}{128} = \boxed{\frac{1}{16}}$.

2. On a $u_1 = 243$ et $q = \frac{1}{3}$. Déterminer u_9.

   $u_n = u_p q^n - p$ donc $u_9 = u_1 q^8 = 243 \times \left(\frac{1}{3}\right)^8 = 3^5 \times \frac{1}{3^8} = \frac{1}{3^3} = \boxed{\frac{1}{27}}$.

3. On a $u_1 = 12$ et $u_5 = 3\,072$. $u_5 = u_1 q^4$ donc $q^4 = \frac{u_5}{u_1} = \frac{3072}{122} = 256$ donc $\boxed{q = \pm 4}$.

VII

En 1999, un parking de 2000 places est construit.
On observe une fréquentation moyenne de 250 véhicules par jour en 1999 (calculée avec 365 jours par an).
Les spécialistes prévoient une augmentation moyenne de 10 % par an de la fréquentation moyenne quotidienne par rapport à l'année précédente (cette prévision est vraie pour toutes les années).
On pose f_0 la fréquentation moyenne quotidienne en 1999, f_n étant la fréquentation moyenne quotidienne de l'année $1999 + n$.

1. Le coefficient multiplicateur associé à une augmentation de 10 % est $q = 1 + 10\,\% = 1,1$.
   - $f_1 = 1,1 f_0 = 275$.
   - $f_2 == 1,1 f_1 \approx 303$.
2. Pour tout n, $f_{n+1} = 1,1 f_n$ donc (f_n) est géométrique de raison $\boxed{q = 1,1}$ et de premier terme $\boxed{f_0 = 250}$.
3. Pour tout n, $f_n = f_0 q^n = \boxed{250 \times 1,1^n}$.
4. La fréquentions est 2018 est $f_{19} = 250 \times 1,1^{19} \approx 1\,529$

VIII Suite auxiliaire

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}$.

1. (a)
   - $\boxed{u_0 = 3}$
   - $\boxed{u_1 = \frac{5}{2}}$
   - $u_2 = \frac{4 \times \frac{5}{2} - 2}{\frac{5}{2} + 1} = \frac{8}{\frac{7}{2}} = \boxed{\frac{16}{7}}$

(b) $u_1 - u_0 = -\dfrac{1}{2}$ et $u_2 - u_1 = \dfrac{16}{7} - \dfrac{5}{2} = -\dfrac{3}{14} \neq u_1 - u_0$ donc la suite 'est pas arithmétique.

$\dfrac{u_1}{u_0} = \dfrac{5}{6}$ et $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{32}{35} \neq \dfrac{u_1}{u_0}$ donc la suite n'est pas géométrique.

Soit (v_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1}$.

On admet que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

(a)
- $v_0 = \dfrac{1}{2}$
- $v_1 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} == \dfrac{1}{3}$
- $v_2 = \dfrac{\frac{2}{7}}{\frac{9}{7}} = \dfrac{2}{9}$

(b) Pour tout n, $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} - 1} = \dfrac{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 2}{\frac{4u_n - 2}{u_n + 1} - 1} = \dfrac{\frac{2u_n - 2}{u_n + 1}}{\frac{3u_n - 3}{u_n + 1}} = \dfrac{2u_n - 4}{3u_n - 3} = \dfrac{2(u_n - 2)}{3(u_n - 1)} = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1} = \boxed{\dfrac{2}{3} v_n}$.

La suite (v_n) est donc **géométrique** de raison $\boxed{q = \dfrac{2}{3}}$ et de premier terme $\boxed{v_0 = \dfrac{1}{2}}$.

2. On en déduit : $\boxed{v_n = \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^n}$.

$v_n = \dfrac{u_n - 2}{u_n - 1} \Leftrightarrow v_n u_n - v_n = u_n - 2 \Leftrightarrow v_n u_n - u_n = v_n - 2 \Leftrightarrow u_n (v_n - 1) = v_n - 2 \Leftrightarrow \boxed{u_n = \dfrac{v_n - 2}{v_n - 1}}$.

En remplaçant : $\boxed{u_n = \dfrac{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 2}{\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}}$