

# Exercices sur les suites arithmétiques et géométriques

## Suites arithmétiques

### I

Dans cet exercice, les suites sont toutes arithmétiques.

- 1) On a  $u_0 = 4$  et  $r = 2$ . Déterminer  $u_{35}$ .
2. On a  $u_1 = 3$  et  $r = -2$ . Déterminer  $u_{17}$ .
3. On a  $u_2 = 3$  et  $u_{14} = 9$ . Déterminer la raison.
4. On a  $u_4 = 1$  et  $u_9 = 4$ . Déterminer  $u_{21}$ .
5. On a  $u_{100} = 650$  et  $r = 8$ . Déterminer  $u_0$ .

### II Suite arithmétique auxiliaire

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 0$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n^2}.$$

Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $v_n = u_n^2$ .

- 1) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.
2. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
3. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .

### III Suite auxiliaire

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 1$  et pour tout entier naturel

$$n, u_{n+1} = \frac{u_n}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n \neq 0$ . (Remarque : cela se démontrerait par récurrence).

On définit la suite  $(v_n)$  par  $v_n = \frac{1}{u_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

1. Montrer que la suite  $(v_n)$  est une suite arithmétique, dont on précisera la raison et le premier terme.
2. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
3. En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .
4. Montrer que pour tout entier naturel  $n$  non nul :
$$0 < u_n \leq \frac{1}{3}.$$
5. Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

### IV

Soit  $(u_n)$  une suite arithmétique de raison  $\frac{1}{2}$  telle que  $u_1 = -1$ .

1. Calculer  $u_{100}$ .
2. Déterminer à partir de quel rang  $N$  on a  $u_N \geq 50$ .
3. Calculer la somme  $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{25} = \sum_{i=1}^{i=25} u_i$ .
4. Calculer la somme  $S' = u_{26} + u_{27} + \dots + u_{50} = \sum_{i=26}^{i=50} u_i$ .

## Suites géométriques

### V

Les suites suivantes sont-elles géométriques? Si oui, préciser leur premier terme et leur raison.

- a)  $u_n = 2^n$
- b)  $u_n = -4n$
- c)  $u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n}$ .

### VI

Dans cet exercice, toutes les suites sont géométriques.

1. On a  $u_0 = 8$  et  $q = \frac{1}{2}$ . Déterminer  $u_7$ .
2. On a  $u_1 = 243$  et  $q = \frac{1}{3}$ . Déterminer  $u_9$ .
3. On a  $u_1 = 12$  et  $u_5 = 3072$ . Déterminer les valeurs possibles pour  $q$ .

### VII

En 1999, un parking de 2000 places est construit.

On observe une fréquentation moyenne de 250 véhicules par jour en 1999 (calculée avec 365 jours par an).

Les spécialistes prévoient une augmentation moyenne de 10 % par an de la fréquentation moyenne quotidienne par rapport à l'année précédente (cette prévision est vraie pour toutes les années).

On pose  $f_0$  la fréquentation moyenne quotidienne en 1999,  $f_n$  étant la fréquentation moyenne quotidienne de l'année 1999 +  $n$ .

1. Calculer  $f_1$  et  $f_2$ .
2. Justifier que la suite  $(f_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison  $q$ .
3. Exprimer  $f_n$  en fonction de  $n$ .
4. Calculer la fréquentation moyenne en 2018. On arrondira le résultat à l'entier près par excès.

### VIII Suite auxiliaire

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $u_0 = 3$  et pour tout entier naturel

$$n, u_{n+1} = \frac{4u_n - 2}{u_n + 1}.$$

1. (a) Calculer  $u_0, u_1$  et  $u_2$ .  
(b) La suite  $(u_n)$  est-elle arithmétique, géométrique?  
Soit  $(v_n)$  la suite définie, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , par  $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n - 1}$ .  
On admet que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n > 1$ .  
(a) Calculer  $v_0, v_1$  et  $v_2$ .  
(b) Quelle est la nature de la suite  $(v_n)$ ?
2. Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ . En déduire une expression de  $u_n$  en fonction de  $n$ .