Enseignement de spécialité : contrôle (récurrence; suites) sur 20 points

I (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n + 6, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. $u_1 = -2u_0 + 6 = -2 \times 5 + 6 = -4$; $\boxed{u_1 = -4}$
2. Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $u_n = 2 + 3 \times (-2)^n$ ».
   Effectuons une démonstration par récurrence.
   - **Initialisation** : au rang $n = 0$: $2 + 3 \times (-2)^0 = 2 + 3 \times 1 = 5 = u_0$ donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
   - **Hérédité** : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier n quelconque, donc $u_n = 2 + 3 \times (-2)^n$ (hypothèse de récurrence).
     Alors : $u_{n+1} = -2u_n + 6 = -2\left(2 + 3 \times (-2)^n\right) + 6 = -4 + 3 \times (-2) \times (-2)^n + 6 = \boxed{2 + 3 \times (-2)^{n+1}}$, ce qu'il fallait démontrer.
     La propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.

   D'après l'axiome de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

II (3 points)

Soit $\mathscr{P}_n$ la propriété : « $4^n - 1 = 3k_n,\ n \in \mathbb{Z}$ ».
Démontrons cette propriété par récurrence.

- **Initialisation** : $4^0 - 1 = 1 - 1 = 0 = 3k_0$ avec $k_0 = 0 \in \mathbb{Z}$, donc $\mathscr{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité** : on suppose $\mathscr{P}_n$ vraie pour un entier n quelconque, donc $4^n - 1 = 3k_n$ (hypothèse de récurrence).
  Alors $4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4 \times (3k_n + 1) - 1 = 3 \times 4k_n + 3 = 3(4k_n + 1) = 3k_{n+1}$ en posant $k_{n+1} = 4k_n + 1 \in \mathbb{Z}$.
  $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.
  La propriété $\mathscr{P}_n$ est héréditaire.

D'après l'axiome de récurrence, $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -5$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$.
Pour tout n, $u_{n+1} - u_n = n^2 + 1 > 0$ donc la suite $({}_n)$ est **croissante**.

IV (1 point)

C'est du cours !

V (2,5 points)

Soit la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 195 + 197 + 199$.
On reconnait la somme des premiers termes d'une suite arithmétique de premier terme $u_0 = 11$ et de raison $r = 2$.
Le dernier terme est $u_N = 2N + 1 = 199$ donc $N = \dfrac{199 - 1}{2} = 99$.
Alors : $S = (N+1)\left(\dfrac{u_0 + u_N}{2}\right) = 100 \times \dfrac{1 + 199}{2} = 100 \times \dfrac{200}{2} = \boxed{10\,000}$

VI (4,5 points)

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$. $u_n = u_0 + nr$ donc $u_{20} = u_0 + 20r = 5 + 20 \times 3 = 65$; $\boxed{u_{20} = 65}$.
2. (u_n) est la suite arithmétique telle que $u_{12} = 6$ et $u_{21} = 9$.
   $u_{21} = u_{12} + (21 - 12)r = u_{12} + 9r$ donc $r = \dfrac{u_{21} - u_{12}}{9} = \dfrac{9-6}{9} = \dfrac{1}{3}$.
   La raison de cette suite est $\boxed{r = \dfrac{1}{3}}$.
   Alors : $u_{14} = u_{12} + 2r = 6 + 2 \times \dfrac{1}{3} = \boxed{\dfrac{20}{3}}$.
3. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.
   Calculons $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{128}$.
   Le nombre de termes dans cette somme S est $128 - 3 + 1 = 126$.
   Alors : $S = 126 \times \dfrac{u_3 = u_{128}}{2}$.
   Or : $u_3 = u_0 + 3r = 5 + 3 \times 3 = 14$.
   $u_{128} = u_0 + 128r = 5 + 3 \times 128 = 389$.
   D'où : $S = 126 \times \left(\dfrac{14 + 389}{2}\right) = 63 \times 403 = 25\,389$; $\boxed{S = 25\,389}$

VII (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n} \end{cases}$.

On admet que, pour tout n, $u_n \neq 2$.

Pour tout n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{u_{n+1} - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{1}{4 - \frac{4}{u_n} - 2} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{1}{2 - \frac{4}{u_n}} - \dfrac{1}{u_n - 2}$
   $= \dfrac{1}{\frac{2u_n - 4}{u_n}} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{u_n}{2u_n - 4} - \dfrac{1}{u_n - 2} = \dfrac{u_n - 2}{2(u_n - 2)} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$.
   Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}}$.
2. On en déduit que la suite (v_n) est arithmétique, de raison $r = \dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{u_0 - 2} = 1$.
3. On en déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 + nr = 1 + \dfrac{n}{2} = \dfrac{n+2}{2}$.
4. $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2} \Leftrightarrow u_n - 2 = \dfrac{1}{v_n}$ donc $u_n = 2 + \dfrac{1}{v_n} = 2 + \dfrac{2}{n+2} = \boxed{\dfrac{2n+6}{n+2}}$.