Enseignement de spécialité : contrôle (récurrence ; suites) sur 20 points

I (3 points)

Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = -2u_n + 6, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Calculer u_1.
2. Démontrer, par récurrence, que pout tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2 + 3 \times (-2)^n$.

II (3 points)

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n - 1$ est divisible par 3.

III (2 points)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = -5$ et, pour tout n, $u_{n+1} = u_n + n^2 + 1$.
Étudier les variations de cette suite.

IV (1 point)

Rappeler la définition d'une suite arithmétique.

V (2,5 points)

Calculer la somme $S = 1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 195 + 197 + 199$.

VI (4,5 points)

1. Soit (u_n) la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$. Calculer u_{20}.
2. (u_n) est la suite arithmétique telle que $u_{12} = 6$ et $u_{21} = 9$.
   Calculer u_{14}.
3. (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 5$ et de raison $r = 3$.
   Calculer $S = u_3 + u_4 + \cdots + u_{128}$.

VII (4 points)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 4 - \dfrac{4}{u_n} \end{cases}$.

On admet que, pour tout n, $u_n \neq 2$..
Pour tout n, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_n - 2}$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{2}$.
2. En déduire que la suite (v_n) est arithmétique ; on précisera son premier terme et sa raison.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. Donner alors l'expression de u_n en fonction de n.