# Exercices de type bac sur ls intégrales

## Exercice I

Pour tout entier naturel $n$, on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x.$$

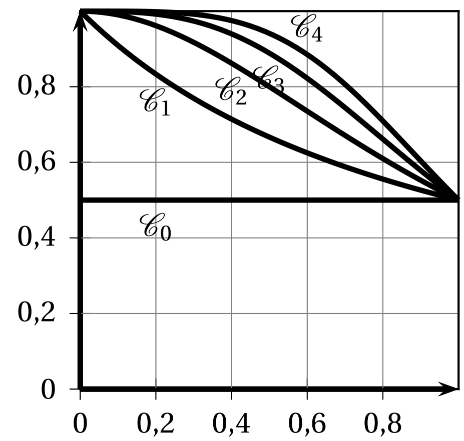
$f_n$ désigne la fonction définie sur $[0;1)$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

$\mathscr{C}_n$ désigne la courbe de $f_n$.

On a tracé $\mathscr{C}_0$, $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$et $\mathscr{C}_4$ dans un repère orthonormé.

1) À l'aide du graphique, conjecturer le sens de variation de $(u_n)$.
2) Déterminer le sens de variation de $(u_n)$ par un calcul.
3) Démontrer que pour tout entier naturel $n$, et tout $x \in [0\,;\,1]$ :
$$\frac{1}{1+x^n} \leqslant 1.$$
4) En déduire que la suite $(u_n)$ est convergente.




## Exercice II

On considère la fonction $f$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t}\,\mathrm{d}t.$.

1) Justifier que $f$ est définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ puis les variations de $f$.
2) En déduire le tableau de signe de $f(x)$.
3) Démontrer que pour tout réel $t \in ]0\,;\,+\infty[$ , $\dfrac{\mathrm{e}^t}{t} \geqslant \dfrac{1}{t}$.
4) Déduire du 3) que pour tout $x \in [1\,;\,+\infty[$, $f(x) \geqslant \ln(x)$.
5) Déduire du 3) que pour tout $x \in ]0\,;\,1]$, $f(x) \leqslant \ln(x)$.
6) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x)$. .