Correction des exercices d'intégration

Corrigé exercice 27 :

La fonction f est une fonction trinôme du second degré.

Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = 37$, il admet donc deux racines réelles : $x_1 = \dfrac{-5-\sqrt{37}}{6}$ et $x_2 = \dfrac{-5+\sqrt{37}}{6}$. Puisque $x_1 < 1$ et $x_2 < 1$, sur $\left[1;\sqrt{3}\right]$, la fonction f est donc continue et positive. Elle admet pour primitive F définie par $F(x) = x^3 + \dfrac{5}{2}x^2 - x$.

L'aire du domaine est donc égale à $\int_1^{\sqrt{3}} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_1^{\sqrt{3}} = \boxed{2\sqrt{3}+5}$ u.a..

Corrigé exercice 28 :

La fonction exponentielle est continue et positive sur $[-2;2]$. Elle admet pour primitive elle-même.
L'aire du domaine est donc égale à $\int_{-2}^{2} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_{-2}^{2} = \boxed{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-2}}$ u.a..
Donc, l'aire de ce domaine est environ égale à 7,25 u.a.

Corrigé exercice 29 :

1. La fonction f est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$ et admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \mathrm{e}^x + x^3 + x$. La valeur moyenne de f sur $[-3;2]$ est donc
$\dfrac{1}{2-(-3)} \int_{-3}^{2} \left(\mathrm{e}^x + 3x^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{5}\left[\mathrm{e}^x + x^3 + x\right]_{-3}^{2}$
$= \dfrac{1}{5}\left[\left[\mathrm{e}^2 + 2^3 + 2\right] - \left[\mathrm{e}^{-3} + (-3)^3 + (-3)\right]\right] = \dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3} + 40}{5}$.
2. f est positive sur $\mathbb{R}$. On note $\mathscr{D}$ le domaine compris entre la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = -3$ et $x = 2$.

   Alors le rectangle $ABCD$, avec $A(-3;0)$, $B(2;0)$, $C\left(2;\dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3} + 40}{5}\right)$ et $D\left(-3;\dfrac{\mathrm{e}^2 - \mathrm{e}^{-3} + 40}{5}\right)$, a la même aire que le domaine $\mathscr{D}$.

Corrigé exercice 32 :

1. $F(2) - F(-1) = \int_{-1}^{2} f(x)\,\mathrm{d}x$
2. $F(3) - F(6) = -(F(6) - F(3)) = -\int_3^6 f(x)\,\mathrm{d}x$
3. $-F(-2) + F(4) = F(4) - F(-2) = \int_{-2}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x$
4. $F(x) - F(2) = \int_2^x f(t)\,\mathrm{d}t$

Corrigé exercice 33 :

1. La fonction $x \mapsto \pi$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = \pi x$. Donc $\int_{-1}^{3} \pi\,\mathrm{d}x = [\pi x]_{-1}^{3} = 3\pi + \pi = \boxed{4\pi}$.
2. La fonction $x \mapsto 5 - 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(x) = 5x - x^2$. Donc $\int_{-1}^{3} (5-2x)\,\mathrm{d}x = \left[5x - x^2\right]_{-1}^{3} = \boxed{12}$.

3. La fonction $t \mapsto -t^3+2t^2-4t+2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(t) = -\frac{1}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3-2t^2+2t$. Donc $\int_{-2}^{1}(-t^3+2t^2-4t+2)\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{4}t^4+\frac{2}{3}t^3-2t^2+2t\right]_{-2}^{1} = \boxed{\frac{87}{4}}$.
4. La fonction $s \mapsto \frac{1}{s^2}$ est continue sur $[1;6]$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(s) = -\frac{1}{s}$.
Donc $\int_1^6 \frac{1}{s^2}\,\mathrm{d}s = \left[-\frac{1}{s}\right]_1^6 = \left(-\frac{1}{6}\right)-\left(-\frac{1}{1}\right) = \boxed{\frac{5}{6}}$.
5. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-2x}$ est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive F définie par $F(x) = -\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$. Donc $\int_0^{-1}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^{-1} = \boxed{\frac{1-\mathrm{e}^2}{2}}$.
6. La fonction $f\colon x \mapsto 24x(3x^2+1)^3$ est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f = 4u'u^3$ avec $u(x) = 3x^2+1$. f admet donc pour primitive la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $F(x) = (3x^2+1)^4$.
Donc $\int_{-1}^{1}24x(3x^2+1)^3\,\mathrm{d}x = \left[(3x^2+1)^4\right]_{-1}^{1} = \boxed{0}$.
Remarque : on pouvait s'en douter car la fonction f est impaire et on intègre sur un intervalle centré sur l'origine.

Corrigé exercice 34 :

Première méthode : Les fonctions $f\colon x \mapsto x^2$ et $g\colon x \mapsto x^2-3x$ sont continues, car dérivables, sur $[-1;2]$. Elles admettent respectivement pour primitive respectivement $F\colon x \mapsto \frac{x^3}{3}$ et $G\colon x \mapsto \frac{x^3}{3}-\frac{3x^2}{2}$.

Ainsi $\int_{-1}^{2}x^2\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-1}^{2} = F(2)-F(-1) = \frac{2^3}{3}-\frac{(-1)^3}{3} = 3$ et $\int_{-1}^{2}\left(x^2-3x\right)\mathrm{d}x = [G(x)]_{-1}^{2} = G(2)-G(-1) = -\frac{3}{2}$.
D'où $\int_{-1}^{2}x^2\,\mathrm{d}x - 4\int_{-1}^{2}(x^2-3x)\,\mathrm{d}x = 3-4\times\left(-\frac{3}{2}\right) = \boxed{9}$.

Deuxième méthode : Par linéarité de l'intégrale,
$\int_{-1}^{2}x^2\,\mathrm{d}x - 4\int_{-1}^{2}(x^2-3x)\,\mathrm{d}x$
$= \int_{-1}^{2}\left[x^2-4(x^2-3x)\right]\mathrm{d}x$
$= \int_{-1}^{2}(-3x^2+12x)\,\mathrm{d}x$.

La fonction $f\colon x \mapsto -3x^2+12x$ est continue, car dérivable, sur $[-1;2]$. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto -x^3+6x^2$. D'où $\int_{-1}^{2}(-3x^2+12x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-1}^{2} = \boxed{9}$.

Corrigé exercice 35 :

1. Par linéarité de l'intégrale, $\int_{-2}^{1}3x\,\mathrm{d}x - 3\int_{-2}^{1}x\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{1}(3x-3x)\,\mathrm{d}x = \boxed{0}$.
2. Par linéarité de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^x+1}{\mathrm{e}^x+1}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 1\,\mathrm{d}x = \boxed{1}$.
3. **D'après la relation de Chasles**, $\int_{-4}^{1}(3t^2+2)\,\mathrm{d}t + \int_1^3(3t^2+2)\,\mathrm{d}t = \int_{-4}^{3}(3t^2+2)\,\mathrm{d}t$. Or, la fonction $t \mapsto 3t^2+2$ est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet pour primitive la fonction F définie par $F(t) = t^3+2t$. D'où $\int_{-4}^{1}(3t^2+2)\,\mathrm{d}t + \int_1^3(3t^2+2)\,\mathrm{d}t = \left[t^3+2t\right]_{-4}^{3} = \left[3^3+2\times3\right]-\left[(-4)^3+2\times(-4)\right] = \boxed{105}$.

Corrigé exercice 38 :

1. Pour tout réel $x \in [-1;4]$, $-5 \leqslant f(x) \leqslant 7$. On intègre les inégalités précédentes sur $[-1;4]$ et on obtient $\int_{-1}^{4}-5\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{4}7\,\mathrm{d}x$ soit

$$-25 \leqslant \int_{-1}^{4}f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 35.$$

2. Pour tout réel $x \in [-1;4]$, $\pi \leqslant f(x) \leqslant 4$. On intègre les inégalités précédentes sur $[-1;4]$ et on obtient $\int_{-1}^{4} \pi \,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{4} 4\,\mathrm{d}x$ soit
$$5\pi \leqslant \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 20.$$
3. Pour tout réel $x \in [-1;4]$, $-\dfrac{2}{3} \leqslant f(x) \leqslant 1$. On intègre les inégalités précédentes sur $[-1;4]$ et on obtient $\int_{-1}^{4} -\dfrac{2}{3}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{4} 1\,\mathrm{d}x$ soit
$$-\frac{10}{3} \leqslant \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 5.$$
4. Pour tout réel $x \in [-1;4]$, $0 \leqslant f(x) \leqslant \sqrt{3}$. On intègre les inégalités précédentes sur $[-1;4]$ et on obtient $\int_{-1}^{4} 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{-1}^{4} \sqrt{3}\,\mathrm{d}x$ soit
$$0 \leqslant \int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 5\sqrt{3}.$$

Corrigé exercice 39 :

Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x \geqslant x$. De plus, les fonctions $x \mapsto \mathrm{e}^x$ et $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$. On intègre l'inégalité précédente sur $[0;5]$ et on obtient $\int_0^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant \int_0^5 x\,\mathrm{d}x$. Donc $\int_0^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant \left[\dfrac{x^2}{2}\right]_0^5$ soit $\int_0^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant \dfrac{5^2}{2} - \dfrac{0^2}{2}$ d'où $\int_0^5 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x \geqslant \dfrac{25}{2}$.

Corrigé exercice 40 :

En utilisant l'intégration par parties, on obtient les résultats suivants.

1. $\int_2^6 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_2^6 - \int_2^6 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\int_2^6 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_2^6 - \int_2^6 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$
3. $[u(x)v(x)]_{-3}^4 - \int_{-3}^4 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-3}^4 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$
4. $u(3)v(3) - u(1)v(1) - \int_1^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_1^3 - \int_1^3 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^3 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$.

Corrigé exercice 41 :

1. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = -x$. On a alors $u(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = -1$. De plus, u, v, u' et v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par intégration par parties, $\int_0^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$
$= [-x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 -1\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [-x\mathrm{e}^x]_0^1 - [-\mathrm{e}^x]_0^1 = -1$.
2. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = x+3$. On a alors $u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = 1$. De plus, u, v, u' et v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par intégration par parties, $\int_{-1}^1 u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = [u(x)v(x)]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$
$= [-(x+3)\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$
$= [-(x+3)\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^1 - [\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^1$
$= \left[-(1+3)\mathrm{e}^{-1} + (-1+3)\mathrm{e}^1\right] - \left[\mathrm{e}^{-1} - \mathrm{e}^1\right]$
$= -4\mathrm{e}^{-1} + 2\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e} = 3\mathrm{e} - 5\mathrm{e}^{-1}$.

Corrigé exercice 61 :

Les fonctions à intégrer sont toutes dérivables, donc continues, sur l'intervalle d'intégration.

1. $\int_{-2}^{-1} \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{4}{x}\right]_{-2}^{-1} = 2$
2. $\int_{5}^{1} \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [\mathrm{e}^x]_5^1 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^5$ (Attention, dans cette question, les bornes de l'intervalle ont été volontairement inversées : le nombre le plus petit est en haut).
3. $\int_{2}^{49} \frac{3}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[6\sqrt{x}\right]_2^{49} = 42 - 6\sqrt{2}$
4. $\int_{-2}^{-1} \left(\mathrm{e}^x + 3x^3 - \frac{1}{x^2}\right)\mathrm{d}x = \left[\mathrm{e}^x + \frac{3}{4}x^4 + \frac{1}{x}\right]_{-2}^{-1} = \frac{-47\mathrm{e}^2 + 4\mathrm{e} - 4}{4\mathrm{e}^2}$

Corrigé exercice 62 :

Les fonctions à intégrer sont toutes dérivables, donc continues sur l'intervalle d'intégration.

1. La fonction $x \mapsto 3x^2(5x^3-1)^2$ est de la forme $\frac{1}{15}u'u^2$ avec $u(x) = 5x^3 - 1$ et $u'(x) = 15x^2$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \frac{1}{15}(5x^3-1)^3$. D'où $\int_{-1}^{2} 3x^2(5x^3-1)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{15}(5x^3-1)^3\right]_{-1}^{2} = 3969$.
2. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{5x-1}$ est de la forme $\frac{1}{5}u'\mathrm{e}^u$ avec $u(x) = 5x - 1$ et $u'(x) = 5$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x-1}$. D'où $\int_{-2}^{1} \mathrm{e}^{5x-1}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{5}\mathrm{e}^{5x-1}\right]_{-2}^{1} = \frac{\mathrm{e}^4 - \mathrm{e}^{-11}}{5}$.
3. La fonction $x \mapsto \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}$ est de la forme $\frac{3}{2} \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ avec $u(x) = 2x^2 + 1$ et $u'(x) = 4x$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1}$. D'où $\int_{-2}^{3} \frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}\sqrt{2x^2+1}\right]_{-2}^{3} = \frac{3\sqrt{19}-9}{2}$.
4. La fonction $x \mapsto \mathrm{e}^x(5\mathrm{e}^x+3)^2$ est de la forme $\frac{1}{15}u'u^2$ avec $u(x) = 5\mathrm{e}^x + 3$ et $u'(x) = 5\mathrm{e}^x$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \frac{1}{15}(5\mathrm{e}^x+3)^3$. D'où $\int_{0}^{2} \mathrm{e}^x(5\mathrm{e}^x+3)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{15}(5\mathrm{e}^x+3)^3\right]_0^2 = \frac{(5\mathrm{e}^2+3)^3 - 512}{3}$.
5. La fonction $x \mapsto \frac{2}{(3-5x)^2}$ est de la forme $-\frac{2}{5}\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 3 - 5x$ et $u'(x) = -5$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto \frac{2}{5} \times \frac{1}{3-5x}$. D'où $\int_{1}^{2} \frac{2}{(3-5x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{5}\frac{1}{3-5x}\right]_1^2 = \frac{1}{7}$.
6. Pour tout réel x, $\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2} = \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ est de la forme $-u'\mathrm{e}^u$, avec $u(x) = \frac{1}{x}$ et $u'(x) = -\frac{1}{x^2}$. Une primitive de cette fonction est donc $x \mapsto -\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$. D'où $\int_{1}^{2} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\right]_1^2 = \mathrm{e} - \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$.

Corrigé exercice 67 :

1. F est une fonction affine telle que $F(0) = 400$, l'expression de F est donc de la forme $F(x) = mx + p$ avec $p = 400$. De plus $F(4) = 0$ donc $4m + 400 = 0$. D'où $m = -100$. Et donc $F(x) = -100x + 400$.
2. F est une fonction dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$.
Une primitive de F est $x \mapsto -50x^2 + 400x$.
Donc, le travail de cette force est égale à $\int_0^4 F(x)\,\mathrm{d}x = \left[-50x^2 + 400x\right]_0^4 = 800$ Joules.

Corrigé exercice 68 :

v est une fonction dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel t, on a $v(t) = -6t^2 + 48t$. Ainsi une primitive de v est $t \mapsto -2t^3 + 24t^2$. La vitesse moyenne de Charline lors de ce trajet vaut donc $\frac{1}{8-0}\int_0^8 v(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{8}\left[-2t^3 + 24t^2\right]_0^8 = 64$ km.h-1.

Corrigé exercice 69 :

Les fonctions à intégrer sont toutes dérivables, donc continues, sur l'intervalle d'intégration.

1. Par linéarité de l'intégrale, $\int_{-2}^{3}(3x-6)\,\mathrm{d}x + 3\int_{-2}^{3}(2-x)\,\mathrm{d}x = \int_{-2}^{3} 0\,\mathrm{d}x = 0$.
2. D'après la relation de Chasles, $\int_{-1}^{1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x + \int_{1}^{-1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{-1} x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = 0$.
3. Par linéarité de l'intégrale,
$$\int_{-1}^{0}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_{2}^{0}\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{0}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$
D'après la relation de Chasles,
$$\int_{-1}^{0}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_{2}^{0}\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{2}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x.$$
Or, une primitive de $x \mapsto \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ est $x \mapsto -\frac{1}{x^2+1}$.
D'où $\int_{-1}^{0}\frac{2x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x - 2\int_{2}^{0}\frac{x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{x^2+1}\right]_{-1}^{2} = \frac{3}{10}$.

Corrigé exercice 75 :

1. Soit un réel x tel que $0 \leqslant x \leqslant 2$. Comme la fonction carré est strictement croissante sur $[0;+\infty[$, $0 \leqslant x^2 \leqslant 4$ et donc $1 \leqslant 1+x^2 \leqslant 5$. De plus, la fonction inverse est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$, d'où $\frac{1}{5} \leqslant \frac{1}{1+x^2} \leqslant 1$. Enfin, on multiplie tous les membres de l'inégalité par $x^3 \geqslant 0$, ce qui nous permet alors d'obtenir $\frac{x^3}{5} \leqslant \frac{x^3}{1+x^2} \leqslant x^3$.

2. f est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. On intègre alors les inégalités précédentes et on obtient $\int_0^2 \frac{x^3}{5}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^2 x^3\,\mathrm{d}x$ d'où $\left[\frac{1}{20}x^4\right]_0^2 \leqslant \int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^2$ et donc $\frac{4}{5} \leqslant \int_0^2 \frac{x^3}{1+x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 4$.

1 Exercices d'entraînement partie 3

Corrigé exercice 76 :

On pose ici $u'(x) = \mathrm{e}^{-x}$ et $v(x) = 3x$, d'où $u(x) = -\mathrm{e}^{-x}$ et $v'(x) = 3$. De plus u, v, u' et v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors

$\int_{-1}^{1} 3x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = [-3x\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} -3\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

Or $x \mapsto -3\mathrm{e}^{-x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive.Une telle primitive est la fonction $F\colon x \mapsto 3\mathrm{e}^{-x}$.

D'où $\int_{-1}^{1} 3x\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -3\mathrm{e}^{-1} - 3\mathrm{e}^{1} - [3\mathrm{e}^{-x}]_{-1}^{1} = -6\mathrm{e}^{-1}$.

Corrigé exercice 77 :

On pose ici $u'(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $v(x) = 4x$, d'où $u(x) = \mathrm{e}^{x}$ et $v'(x) = 4$. De plus u, v, u' et v' sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors $\int_{0}^{6} 4x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = [4x\mathrm{e}^{x}]_{0}^{6} - \int_{0}^{6} 4\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x$.

Or $x \mapsto 4\mathrm{e}^{x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive.Une telle primitive est la fonction $F\colon x \mapsto 4\mathrm{e}^{x}$.

D'où $\int_{0}^{6} 4x\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = [4x\mathrm{e}^{x}]_{0}^{6} - \int_{0}^{6} 4\mathrm{e}^{x}\,\mathrm{d}x = 24\mathrm{e}^{6} - [4\mathrm{e}^{x}]_{0}^{6} = 20\mathrm{e}^{6} + 4$.

Corrigé exercice 78 :

On pose ici $u'(x) = \dfrac{1}{(2+x)^3}$ et $v(x) = x$, d'où $u(x) = -\dfrac{1}{2(2+x)^2}$ et $v'(x) = 1$. De plus u, v, u' et v' sont dérivables sur $[-1;2]$, et u' et v' sont continues sur $[-1;2]$. Par intégration par parties, on obtient alors $\int_{-1}^{2} \dfrac{x}{(2+x)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{(2+x)^2}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

Or $x \mapsto -\dfrac{1}{2(2+x)^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive. Une telle primitive est la fonction $F\colon x \mapsto \dfrac{1}{2(2+x)}$.

D'où $\int_{-1}^{2} \dfrac{x}{(2+x)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{(2+x)^2}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} -\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{(2+x)^2}\,\mathrm{d}x$

$= \left[-\dfrac{1}{2}\dfrac{x}{(2+x)^2}\right]_{-1}^{2} - \left[\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{2+x}\right]_{-1}^{2} = -\dfrac{3}{16}$.

Corrigé exercice 79 :

1. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^{3x-1}$ et $v(x) = 4x$. u est donc définie par $u(x) = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{3x-1}$ et, pour tout réel x, on a $v'(x) = 4$. De plus u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors $I = \int_{-2}^{2} 4x\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{4}{3}x\mathrm{e}^{3x-1}\right]_{-2}^{2} - \int_{-2}^{2} \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{3x-1}\,\mathrm{d}x$.

   Or $x \mapsto \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{3x-1}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \dfrac{4}{9}\mathrm{e}^{3x-1}$.

   D'où $I = \left[\dfrac{4}{3}x\mathrm{e}^{3x-1}\right]_{-2}^{2} - \left[\dfrac{4}{9}\mathrm{e}^{3x-1}\right]_{-2}^{2} = \dfrac{20}{9}\mathrm{e}^{5} + \dfrac{28}{9}\mathrm{e}^{-7}$.

2. On pose $u'(x)=\mathrm{e}^{4+5x}$ et $v(x)=x$. u est donc définie par $u(x)=\frac{1}{5}\mathrm{e}^{4+5x}$ et, pour tout réel x, on a $v'(x)=1$. De plus u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors $\int_0^1 x\mathrm{e}^{4+5x}\,\mathrm{d}x=\left[\frac{1}{5}x\mathrm{e}^{4+5x}\right]_0^1-\int_0^1\frac{1}{5}\mathrm{e}^{4+5x}\,\mathrm{d}x$. Or $x\mapsto\frac{1}{5}\mathrm{e}^{4+5x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive. Une telle primitive est la fonction $F\colon x\mapsto\frac{1}{25}\mathrm{e}^{4+5x}$. D'où $J=\left[\frac{1}{5}x\mathrm{e}^{4+5x}\right]_{-2}^{2}-\left[\frac{1}{25}\mathrm{e}^{4+5x}\right]_{-2}^{2}=\frac{4}{25}\mathrm{e}^{9}+\frac{1}{25}\mathrm{e}^{4}$.

Corrigé exercice 80 :

On pose $u'(x)=2x\mathrm{e}^{x^2-1}$ et $v(x)=x^2$. u est donc définie par $u(x)=\mathrm{e}^{x^2-1}$ et, pour tout réel x, on a $v'(x)=2x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors $\int_{-1}^1 2x^3\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x=\left[x^2\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^1-\int_{-1}^1 2x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$. Or $x\mapsto 2x\mathrm{e}^{x^2-1}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive. Une telle primitive est la fonction $F\colon x\mapsto\mathrm{e}^{x^2-1}$.

Donc $I=\left[x^2\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^1-\left[\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^1=\left[\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^0\right]-\left[\mathrm{e}^0-\mathrm{e}^0\right]=0$.

Remarque : La fonction à intégrer est une fonction impaire. Il est donc possible de calculer cette intégrale sans utiliser une intégration par parties.

Corrigé exercice 81 :

1. On pose $u'(x)=\frac{1}{(5x+3)^3}$ et $v(x)=x$. u est donc définie par $u(x)=-\frac{1}{10}\frac{1}{(5x+3)^2}$ et, pour tout réel x, $v'(x)=1$. u et v sont dérivables, donc continues sur $[0;1]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $[0;1]$. Par intégration par parties, on obtient $\int_0^1\frac{x}{(5x+3)^3}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{10}\frac{x}{(5x+3)^2}\right]_0^1-\int_0^1-\frac{1}{10}\frac{1}{(5x+3)^2}\,\mathrm{d}x$.
   Or, $x\mapsto-\frac{1}{10}\frac{1}{(5x+3)^2}$ est une fonction continue sur $[0;1]$ et admettant donc une primitive. Une telle primitive est la fonction $F\colon x\mapsto\frac{1}{50}\frac{1}{5x+3}$.
   D'où $I=\left[-\frac{1}{10}\frac{x}{(5x+3)^2}\right]_0^1-\left[\frac{1}{50}\frac{1}{5x+3}\right]_0^1=\frac{1}{384}$.
2. On pose $u'(x)=\frac{1}{(3x-9)^3}$ et $v(x)=5x$. u est donc définie par $u(x)=-\frac{1}{6}\frac{1}{(3x-9)^2}$ et, pour tout réel x, $v'(x)=5$. u et v sont dérivables, donc continues sur $[-1;0]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $[-1;0]$. Par intégration par parties, on obtient $\int_{-1}^0\frac{5x}{(3x-9)^3}\,\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{6}\frac{5x}{(3x-9)^2}\right]_{-1}^0-\int_{-1}^0-\frac{5}{6}\frac{1}{(3x-9)^2}\,\mathrm{d}x$.
   Or, $x\mapsto-\frac{5}{6}\frac{1}{(3x-9)^2}$ est une fonction continue sur $[-1;0]$ et admettant donc une primitive. Une primitive de f est $F\colon x\mapsto\frac{5}{18}\frac{1}{3x-9}$.
   D'où $J=\left[-\frac{1}{6}\frac{5x}{(3x-9)^2}\right]_{-1}^0-\left[\frac{5}{18}\frac{1}{3x-9}\right]_{-1}^0=\frac{5}{2592}$.

Corrigé exercice 82 :

1. On pose $u'(x)=(8x+2)^2$ et $v(x)=2x$. u est donc définie par $u(x)=\frac{1}{24}(8x+2)^3$ et, pour tout réel x, $v'(x)=2$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$.

Par intégration par parties, on obtient $\int_{-1}^{1} 2x(8x+2)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{12}x(8x+2)^3\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} \frac{1}{12}(8x+2)^3\,\mathrm{d}x$.
Or, $x \mapsto \frac{1}{12}(8x+2)^3$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admettant donc une primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \frac{1}{384}(8x+2)^4$.
D'où $I = \left[\frac{1}{12}x(8x+2)^3\right]_{-1}^{1} - \left[\frac{1}{384}(8x+2)^4\right]_{-1}^{1} = \frac{128}{3}$.
Remarque : Il est aussi possible de développer l'expression de départ et de déterminer ensuite une primitive de cette forme développée.

2. On pose $u'(x) = (8x+2)^5$ et $v(x) = -x$. u est donc définie par $u(x) = \frac{1}{48}(8x+2)^6$ et, pour tout réel x, $v'(x) = -1$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, $\int_{-2}^{1} -x(8x+2)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{48}x(8x+2)^6\right]_{-2}^{1} - \int_{-2}^{1} -\frac{1}{48}(8x+2)^6\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto -\frac{1}{48}(8x+2)^6$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc une primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto -\frac{1}{2688}(8x+2)^7$.
D'où $J = \left[-\frac{1}{48}x(8x+2)^6\right]_{-2}^{1} - \left[-\frac{1}{2688}(8x+2)^7\right]_{-2}^{1} = -\frac{2041392}{7}$.

Corrigé exercice 83 :

1. On pose $u'(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et $v(x) = 3x^2$. u est donc définie par $u(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ et, pour tout réel x, on a $v'(x) = 6x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $\int_{-1}^{3} 3x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^{3} - \int_{-1}^{3} 3x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto 3x\mathrm{e}^{x^2}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ qui admet donc une primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \frac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2}$. D'où
$I = \left[\frac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^{3} - \left[\frac{3}{2}\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^{3} = \left[\frac{27}{2}\mathrm{e}^9 - \frac{3}{2}\mathrm{e}^1\right] - \left[\frac{3}{2}\mathrm{e}^9 - \frac{3}{2}\mathrm{e}^1\right] = 12\mathrm{e}^9$.
2. On pose $u'(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-1}$ et $v(x) = 4(2x+1)^2$. u' est de la forme $w'\mathrm{e}^w$ avec $w(x) = x^2+x-1$ donc u est donc définie par $u(x) = \mathrm{e}^{w(x)} = \mathrm{e}^{x^2+x-1}$. Pour tout réel x, $v'(x) = 16(2x+1)$. De plus, u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $\int_0^2 4(2x+1)^3\mathrm{e}^{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x = \left[4(2x+1)^2\mathrm{e}^{x^2+x-1}\right]_0^2 - \int_0^2 16(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-1}\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto 16(2x+1)\mathrm{e}^{x^2+x-1}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc une primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto 16\mathrm{e}^{x^2}+x-1$.
D'où $J = \left[4(2x+1)^2\mathrm{e}^{x^2+x-1}\right]_0^2 - \left[16\mathrm{e}^{x^2+x-1}\right]_0^2 = 84\mathrm{e}^5 + 12\mathrm{e}^{-1}$.

Corrigé exercice 84 :

1. On pose $u'(x) = \frac{x}{(3x^2-9)^3}$ et $v(x) = 5x^2$.
u est donc définie par $u(x) = -\frac{1}{12}\frac{1}{(3x^2-9)^2}$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 10x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $[0;1]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $[0;1]$. Par intégration par parties,

on obtient $\int_0^1 \frac{5x^3}{(3x^2-9)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{5}{12}\frac{x^2}{(3x^2-9)^2}\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{10}{12}\frac{x}{(3x^2-9)^2}\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto -\frac{10}{12}\frac{x}{(3x^2-9)^2}$ est une fonction continue sur $[0;1]$, elle admet donc une primitive. Elle admet donc pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \frac{5}{36}\frac{1}{3x^2-9}$.

D'où $I = \left[-\frac{5}{12}\frac{x^2}{(3x^2-9)^2}\right]_0^1 - \left[\frac{5}{36}\frac{1}{3x^2-9}\right]_0^1 = -\frac{5}{1296}$.

Avec Geogebra, on obtient le résultat ci-dessous.

Ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé.

2. On pose $u'(x) = \frac{x}{(3x^2-9)^3}$ et $v(x) = 5x^2$.

   u est donc définie par $u(x) = -\frac{1}{12}\frac{1}{(3x^2-9)^2}$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 10x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $[-1;0]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $[-1;0]$. Par intégration par parties, on obtient $\int_{-1}^0 \frac{5x^3}{(3x^2-9)^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{12}\frac{5x^2}{(3x^2-9)^2}\right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -\frac{10}{12}\frac{x}{(3x^2-9)^2}\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto -\frac{10}{12}\frac{x}{(3x^2-9)^2}$ est une fonction continue sur $[-1;0]$, elle admet donc des primitives. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \frac{5}{36}\frac{1}{3x^2-9}$.

   D'où $J = \left[-\frac{5}{12}\frac{x^2}{(3x^2-9)^2}\right]_{-1}^0 - \left[\frac{5}{36}\frac{1}{3x^2-9}\right]_{-1}^0 = \frac{5}{1296}$.

   Avec Geogebra, on obtient le résultat ci-dessous.

   Ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé.

   Remarque : La fonction à intégrer est impaire, donc les intégrales I et J sont opposées.

Corrigé exercice 85 :

1. On pose $u'(x) = x(x^2-1)^2$ et $v(x) = 3x^2$. u est donc définie par $u(x) = \frac{1}{6}(x^2-1)^3$et, pour tout réel x, $v'(x) = 6x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $\int_{-1}^1 3x^3(x^2-1)^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2(x^2-1)^3\right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x(x^2-1)^3\,\mathrm{d}x$. Or, $x \mapsto x(x^2-1)^3$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \frac{1}{8}(x^2-1)^4$.

   D'où $I = \left[\frac{1}{2}x^2(x^2-1)^3\right]_{-1}^1 - \left[\frac{1}{8}(x^2-1)^4\right]_{-1}^1 = 0$.

   Avec Geogebra, on obtient le résultat ci-dessous.

   Ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé.

   Remarques :

   — La fonction à intégrer est une fonction impaire. Il est donc possible de ne pas utiliser l'intégration par parties.

   — Il est aussi possible de développer l'expression de départ et de déterminer ensuite une primitive de cette forme développée.

2. On pose $u'(x) = x^2(x^3+5)^3$ et $v(x) = 2x^3$. u est donc définie par $u(x) = \frac{1}{12}(x^3+5)^4$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 6x^2$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $\int_{-2}^1 2x^5(x^3+5)^3\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{6}x^3(x^3+5)^4\right]_{-2}^1 - \int_{-2}^1 \frac{1}{2}x^2(x^3+5)^4\,\mathrm{d}x$.

Or, $x \mapsto \frac{1}{2}x^2(x^3+5)^4$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, elle admet donc des primitive. Elle admet pour primitive la fonction $F\colon x \mapsto \frac{1}{30}(x^3+5)^5$.
D'où $J = \left[\frac{1}{6}x^3(x^3+5)^4\right]_{-2}^{1} - \left[\frac{1}{30}(x^3+5)^5\right]_{-2}^{1} = \frac{567}{10}$.
Avec Geogebra, on obtient le résultat ci-dessous.
Ce qui correspond bien à ce que nous avons trouvé.
Remarque : Il est aussi possible de développer l'expression de départ et de déterminer ensuite une primitive de cette forme développée.

Corrigé exercice 86 :

1. On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{x}$. u est donc définie par $u(x) = x$ et, pour tout réel $x > 0$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. u et v sont dérivables, donc continues sur $]0;+\infty[$. u' et v' sont dérivables, donc continues sur $]0;+\infty[$. Par intégration par parties, on obtient $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\sqrt{x}\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \left[x\sqrt{x}\right]_1^4 - \int_1^4 \frac{1}{2}\sqrt{x}\,\mathrm{d}x$.
D'où $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[x\sqrt{x}\right]_1^4$ c'est-à-dire $\frac{3}{2}\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = 7$ et donc $\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \times 7 = \frac{14}{3}$.
2. On pose $u'(x) = 1$ et $v(x) = \sqrt{x+5}$. u est donc définie par $u(x) = x+5$ et, pour tout réel $x > -5$, $v'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$. u et v sont dérivables, donc continues sur $]-5;+\infty[$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $]-5;+\infty[$. Par intégration par parties, on obtient $\int_{-1}^4 \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x = \left[(x+5)\sqrt{x+5}\right]_{-1}^4 - \int_{-1}^4 \frac{x+5}{2\sqrt{x+5}}\,\mathrm{d}x$
$= \left[(x+5)\sqrt{x+5}\right]_{-1}^4 - \frac{1}{2}\int_{-1}^4 \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x$.
Donc $\frac{3}{2}\int_{-1}^4 \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x = 19$ d'où $\int_{-1}^4 \sqrt{x+5}\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3} \times 19 = \frac{38}{3}$.

Corrigé exercice 87 :

1. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x$. u est donc définie par $u(x) = \mathrm{e}^x$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 1$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient
$J = \int_0^1 x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = [x\mathrm{e}^x]_0^1 - [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e}^1 - \mathrm{e}^1 + 1 = 1$.
2. (a) On pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = x^2$. u est donc définie par $u(x) = \mathrm{e}^x$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 2x$. u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $I = \int_0^1 x^2\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - \int_0^1 2x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - 2J$
   (b) En se servant du résultat de la question 1, on obtient $I = \left[x^2\mathrm{e}^x\right]_0^1 - 2J = \mathrm{e}^1 - 2 = \mathrm{e} - 2$.

Corrigé exercice 88 :

1. On pose $u_1'(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et $v_1(x) = \frac{3}{2}x^4$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ et, pour tout réel x, $v_1'(x) = 6x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient
$$I = \int_{-1}^2 \frac{3}{2}x^5\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{4}x^4\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^2 - \int_{-1}^2 3x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et $v_2(x) = 3x^2$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}$ et, pour tout réel x, $v_2'(x) = 6x$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient

$$\int_{-1}^{2} 3x^3\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{3}{2}x^2\mathrm{e}^{x^2}\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} 3x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{9}{2}\mathrm{e}^4.$$

D'où, en conclusion, $I = \int_{-1}^{2} \dfrac{3}{2}x^5\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = 12\mathrm{e}^4 - \dfrac{3}{4}\mathrm{e} - \dfrac{9}{2}\mathrm{e}^4 = \dfrac{15}{2}\mathrm{e}^4 - \dfrac{3}{4}\mathrm{e}$.

2. On pose $u_1'(x) = x\mathrm{e}^{x^2-1}$ et $v_1(x) = x^4$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2-1}$ et, pour tout réel x, $v_1'(x) = 4x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $J = \int_{-1}^{0} x^5\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}x^4\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2x^3\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x$.

   Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = 2x\mathrm{e}^{x^2-1}$ et $v_2(x) = x^2$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \mathrm{e}^{x^2-1}$ et, pour tout réel x, $v_2'(x) = 2x$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient
   $\int_{-1}^{0} 2x^3\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} 2x\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \left[x^2\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^{0} - \left[\mathrm{e}^{x^2-1}\right]_{-1}^{0} = -\mathrm{e}^{-1}$.

   D'où, en conclusion, $J = \int_{-1}^{0} x^5\mathrm{e}^{x^2-1}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{e}^{-1}$.

Corrigé exercice 89 :

1. On pose $u_1'(x) = x(x^2-4)^3$ et $v_1(x) = x^4$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \dfrac{1}{8}(x^2-4)^4$ et, pour tout réel x, $v_1'(x) = 4x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient $I = \int_{-1}^{2} x^5(x^2-4)^3\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{8}x^4(x^2-4)^4\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} \dfrac{1}{2}x^3(x^2-4)^4\,\mathrm{d}x$.

   Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = x(x^2-4)^4$ et $v_2(x) = \dfrac{1}{2}x^2$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \dfrac{1}{10}(x^2-4)^5$ et, pour tout réel x, $v_2'(x) = x$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient
   $\int_{-1}^{2} x^5(x^2-4)^3\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{20}x^2(x^2-4)^5\right]_{-1}^{2} - \int_{-1}^{2} \dfrac{1}{10}x(x^2-4)^5\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{20}x^2(x^2-4)^5\right]_{-1}^{2} - \left[\dfrac{1}{120}(x^2-4)^6\right]_{-1}^{2} = \dfrac{729}{40}$.

   D'où, en conclusion, $I = \int_{-1}^{2} x^5(x^2-4)^3\,\mathrm{d}x = -\dfrac{81}{8} - \dfrac{729}{40} = -\dfrac{567}{20}$.

2. On pose $u_1'(x) = x^2(2x^3+1)^4$ et $v_1(x) = -x^6$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \dfrac{1}{30}(2x^3+1)^5$ et, pour tout réel x, $v_1'(x) = -6x^5$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient

$$J = \int_{0}^{1} -x^8(2x^3+1)^4\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{30}x^6(2x^3+1)^5\right]_{0}^{1} - \int_{0}^{1} -\frac{1}{5}x^5(2x^3+1)^5\,\mathrm{d}x.$$

   Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = x^2(2x^3+1)^5$ et $v_2(x) = -\dfrac{1}{5}x^3$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \dfrac{1}{36}(2x^3+1)^6$ et, pour tout réel x, on a : $v_2'(x) = -\dfrac{3}{5}x^2$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient

$$\int_0^1 -\frac{1}{5}x^5(2x^3+1)^5\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{180}x^3(2x^3+1)^6\right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{60}x^2(2x^3+1)^6\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{180}x^3(2x^3+1)^6\right]_0^1 - \left[-\frac{1}{2520}(2x^3+1)^7\right]_0^1 = -\frac{401}{126}.$$

D'où, en conclusion, $J = \int_0^1 -x^8(2x^3+1)^5\,\mathrm{d}x = -\frac{81}{10} + \frac{401}{126} = -\frac{1549}{315}$.

Corrigé exercice 90 :

1. On pose $u_1'(x) = \frac{1}{(x+1)^4}$ et $v_1(x) = x^2$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^3}$ et, pour tout réel, $v_1'(x) = 2x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $[0;3]$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $[0;3]$. Par intégration par parties, on obtient $I = \int_0^3 \frac{x^2}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{3}\frac{x^2}{(x+1)^3}\right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{2}{3}\frac{x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x$.
   Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$ et $v_2(x) = -\frac{2}{3}x$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = -\frac{1}{2}\frac{1}{(x+1)^2}$et, pour tout réel x, $v_2'(x) = -\frac{2}{3}$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $[0;3]$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $[0;3]$. Par intégration par parties, on obtient

   $$\int_0^3 -\frac{2}{3}\frac{x}{(x+1)^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\frac{x}{(x+1)^2}\right]_0^3 - \int_0^3 \frac{1}{3}\frac{1}{(x+1)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{3}\frac{x}{(x+1)^2}\right]_0^3 - \left[-\frac{1}{3}\frac{1}{x+1}\right]_0^3 = -\frac{3}{16}.$$

   D'où, en conclusion, $\int_0^3 \frac{x^2}{(x+1)^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{3}{64} + \frac{3}{16} = \frac{9}{64}$.

2. On pose $u_1'(x) = \frac{x}{(2-3x^2)^4}$ et $v_1(x) = 36x^4$. u_1 est donc définie par $u_1(x) = \frac{1}{18}\frac{1}{(2-3x^2)^3}$ et, pour tout réel, $v_1'(x) = 144x^3$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $[1;3]$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $[1;3]$. Par intégration par parties, on obtient $J = \int_1^3 \frac{36x^5}{(2-3x^2)^4}\,\mathrm{d}x = \left[2\frac{x^4}{(2-3x^2)^3}\right]_1^3 - \int_1^3 8\frac{x^3}{(2-3x^2)^3}\,\mathrm{d}x$.
   Pour calculer la deuxième intégrale, on pose maintenant $u_2'(x) = \frac{x}{(2-3x^2)^3}$ et $v_2(x) = 8x^2$. u_2 est donc définie par $u_2(x) = \frac{1}{12}\frac{1}{(2-3x^2)^2}$ et, pour tout réel x, $v_2'(x) = 16x$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $[1;3]$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $[1;3]$. Par intégration par parties, on obtient

   $$\int_1^3 8\frac{x^3}{(2-3x^2)^3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\frac{x^2}{(2-3x^2)^2}\right]_1^3 - \int_1^3 \frac{4}{3}\frac{x}{(2-3x^2)^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}\frac{x^2}{(2-3x^2)^2}\right]_1^3 - \left[\frac{2}{9}\frac{1}{2-3x^2}\right]_1^3 = -\frac{544}{625}.$$

   D'où, en conclusion, $J = \int_1^3 \frac{36x^5}{(2-3x^2)^4}\,\mathrm{d}x = -\frac{31088}{1565} + \frac{544}{625} = \frac{44688}{15625}$.

2 Exercices de synthèse

Corrigé exercice 91 :

1. L'affirmation est fausse. En effet l'aire du domaine demandée est d'environ 8,5 carreaux. Or, 1 carreau est d'aire 2×1 u.a., soit 2 u.a.. L'aire demandée est donc environ de 17 u.a..
2. L'affirmation est vraie. L'aire du domaine comprise entre la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$ est environ 38 carreaux d'aire $0,2 \times 0,2 = 0,04$ u.a.. L'aire du domaine est donc d'environ 1,5 u.a.. La fonction g étant négative sur $[-1;1]$, on en conclut que $\int_{-1}^{1} g(x)\,\mathrm{d}x \approx -\dfrac{3}{2}$.
3. L'affirmation est vraie. Soit un réel $x \geqslant 1$. Pour tout réel t tel que $1 \leqslant t \leqslant x$, $1 - t \leqslant 0$ et $\mathrm{e}^t > 0$, donc $(1-t)\mathrm{e}^t \leqslant 0$. La fonction $t \mapsto (1-t)\mathrm{e}^t$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. D'après la positivité de l'intégrale, on en conclut que $\int_1^x (1-t)\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t \leqslant 0$.
4. L'affirmation est fausse. Prenons par exemple h et k définies et continues sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = (x-5)^3$ et $k(x) = x-5$. On a alors $\int_1^9 (x-5)^3\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{(x-5)^4}{4}\right]_1^9 = 0$ et $\int_1^9 (x-5)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{(x-5)^2}{2}\right]_1^9 = 0$ donc $\int_1^9 (x-5)^3\,\mathrm{d}x = \int_1^9 (x-5)\,\mathrm{d}x$ mais $h(1) = -64 \neq -4 = k(1)$.

Corrigé exercice 92 :

1. f est continue sur $\mathbb{R}$. D'après la linéarité de l'intégrale, $\int_0^3 (5x-2)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^3 5x\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^3 -2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x$. Pour calculer la première de ces deux intégrales, on utilise une intégration par partie. On pose $u'(x) = \mathrm{e}^{-2x}$ et $v(x) = 5x$. u est donc définie par $u(x) = -\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}$ et, pour tout réel, $v'(x) = 5$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $[0;3]$, et u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $[0;3]$. Par intégration par parties, on obtient alors

$$\int_0^3 (5x-2)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{5}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 - \int_0^3 -\frac{5}{2}\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^3 -2\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{5}{2}x\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 - \left[\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 + \left[\mathrm{e}^{-2x}\right]_0^3 = -\frac{31}{4}\mathrm{e}^{-6} + \frac{1}{4}.$$

2. La valeur moyenne de f sur $[0;3]$ est $\dfrac{1}{3-0}\int_0^3 (5x-2)\mathrm{e}^{-2x}\,\mathrm{d}x = -\dfrac{31}{12}\mathrm{e}^{-6} + \dfrac{1}{12}$.

Corrigé exercice 93 :

1. Pour tout réel $x \in I$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$. De plus, f est continue sur $[a;b]$. On intègre ces inégalités et on obtient alors $\int_a^b m\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b M\,\mathrm{d}x$ c'est-à-dire $m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant M(b-a)$.
2. **Application**
   (a) La fonction f est dérivable sur $[1;4]$ et, pour tout $x \in [1;4]$, $f'(x) = \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$. f est donc strictement croissante sur $[1;4]$. D'où, pour tout réel $x \in [1;4]$, $f(1) \leqslant f(x) \leqslant f(4)$, soit $\dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{16}{17}$.
   Or, f est continue, car dérivable, sur $[1;4]$.
   Ainsi, d'après la question 1., $\dfrac{3}{2} \leqslant \int_1^4 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{48}{17}$.
   (b) Avec la calculatrice, on obtient le résultat ci-dessous.
   Une valeur approchée de la valeur moyenne de f sur $[1;4]$ est :

$$\frac{1}{4-1}2,4596 \approx 0,8199.$$

Corrigé exercice 94 :

1. f est positive sur $[0;25]$. L'aire en u.a. de la piscine est donc égale à $\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x$. Et $\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{25}(5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{25} 5x\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{25} 7\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale.
   Pour déterminer la valeur de la première intégrale on utilise une intégration par parties. On pose alors $u'(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}$ et $v(x) = 5x$. u est donc définie par $u(x) = -\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-0,2x} = -5\mathrm{e}^{-0,2x}$ et, pour tout réel x, $v'(x) = 5$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$.
   Par intégration par parties, on obtient alors
   $$\int_0^{25}(5x+7)\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{5}{0,2}x\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} - \int_0^{25} -25\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^{25} 7\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x =$$
   $$\left[-25x\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} - \left[125\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} + \left[-35\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_0^{25} = -785\mathrm{e}^{-5} + 160.$$
   De plus l'unité d'aire est de 1 u.a. = 1 m². Donc, l'aire de la piscine est de $160 - 785\mathrm{e}^{-5}$ m², soit environ 154,711 m².
2. Pour répondre à cette question, on calcule la valeur moyenne de f sur $[0;25]$. On obtient $\frac{1}{25-0}\int_0^{25} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{32}{5} - \frac{157}{5}\mathrm{e}^{-5} \approx 6,1884$. L'organisme devra donc construire une piscine rectangulaire de largeur environ égale à 6,2 m.

Corrigé exercice 95 :

1. (a) La fonction f est dérivable sur $[0;20]$ comme produit de fonctions dérivables sur cet intervalle. Et, pour tout $x \in [0;20]$, $f'(x) = 1000\mathrm{e}^{-0,2x} - 200(x+5)\mathrm{e}^{-0,2x} = -200x\mathrm{e}^{-0,2x} \leqslant 0$. On en déduit que f est strictement décroissante sur $[0;20]$.
   (b) Lorsque le prix unitaire croît entre 0 et 20, le nombre d'objets demandés diminue.
2. (a) f est continue, car dérivable, sur $[0;20]$. On peut donc intégrer la fonction f. $\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_5^{15} 1000x\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x$
   $\int_5^{15} 5000\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x$par linéarité de l'intégrale. Pour calculer la première intégrale, on utilise une intégration par parties. On pose alors $u'(x) = \mathrm{e}^{-0,2x}$ et $v(x) = 1000x$. u est donc définie par $u(x) = -\frac{1}{0,2}\mathrm{e}^{-0,2x} = -5\mathrm{e}^{-0,2x}$ et, pour tout réel, $v'(x) = 1000$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$, u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on obtient alors
   $$\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-5000x\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_5^{15} - \int_5^{15} -5000\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x + \int_5^{15} 5000\mathrm{e}^{-0,2x}\,\mathrm{d}x =$$
   $$\left[-5000x\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_5^{15} - \left[25000\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_5^{15} + \left[-25000\mathrm{e}^{-0,2x}\right]_5^{15} = 1000\left(75\mathrm{e}^{-1} - 125\mathrm{e}^{-3}\right).$$
   (b) La valeur moyenne de la fonction f vaut alors :
   $$\frac{1}{15-10}\int_5^{15} f(x)\,\mathrm{d}x = 200\left(75\mathrm{e}^{-1} - 125\mathrm{e}^{-3}\right) \approx 4274.$$
   Ainsi, le nombre moyen d'objets demandés lorsque le prix unitaire varie entre 5 et 15 euros est d'environ 4274.

Corrigé exercice 96 :

1. (a) Pour tout réel $x \neq -2$, $ax+b+\frac{c}{(x+2)^2} = \frac{(ax+b)(x+2)^2+c}{(x+2)^2}$ soit $ax+b+\frac{c}{(x+2)^2} = \frac{ax^3+(4a+b)x^2+(4a+4b}{(x+2)^2}$
   En identifiant les coefficients des polynômes au numérateur, on obtient alors :

$$\begin{cases} a=1 \\ 4a+b=6 \\ 4a+4b=12 \\ 4b+c=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=2 \\ b=2 \\ c=-9 \end{cases}.$$

En conclusion, pour tout réel $x \neq -2$, $f(x) = x+2-\dfrac{9}{(x+2)^2}$.

(b) f est continue, car dérivable, sur $[-1;4]$. Elle admet donc une primitive. Une telle primitive est $F\colon x \mapsto \dfrac{x^2}{2}+2x+\dfrac{9}{x+2}$.

Ainsi $\int_{-1}^{4} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\dfrac{1}{2}x^2+2x+\dfrac{9}{x+2}\right]_{-1}^{4} = 10$.

2. Pour tout réel $x \neq -1$, $ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2} = \dfrac{(ax+b)(x+1)^2+c}{(x+1)^2}$ soit $ax+b+\dfrac{c}{(x+1)^2} = \dfrac{ax^3+(2a+b)x^2+(a+2b)x+(b+c)}{(x+1)^2}$.

En identifiant les coefficients des polynômes au numérateur, on obtient alors :

$$\begin{cases} a=-1 \\ 2a+b=1 \\ a+2b=5 \\ b+c=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=3 \\ b=3 \\ c=5 \end{cases}.$$

Ainsi, pour tout réel $x \neq -1$, $f(x) = -x+3+\dfrac{5}{(x+1)^2}$.

De plus f est continue, car dérivable, sur $[0;3]$. Elle admet donc une primitive. Une telle primitive est $F\colon x \mapsto -\dfrac{x^2}{2}+3x-\dfrac{5}{x+1}$.

Ainsi $\int_{0}^{3} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\dfrac{1}{2}x^2+3x-\dfrac{5}{x+1}\right]_{0}^{3} = \dfrac{33}{4}$.

Corrigé exercice 97 :

1. Pour tout réel x, $f(-x) = \int_0^{-x} \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -\int_{-x}^{0} \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

   Or, la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est paire, donc $\int_{-x}^{0} \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

   D'où $f(-x) = -\int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = -f(x)$. Ainsi, f est une fonction impaire.

2. (a) La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{1+t^2}$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. Ainsi f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

   (b) D'après la question précédente, f' est strictement positive sur $\mathbb{R}$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Soit un réel $x \geqslant 1$, $\int_1^x \dfrac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\dfrac{1}{t}\right]_1^x = -\dfrac{1}{x}+1 = 1-\dfrac{1}{x}$.

   (b) Soit un réel $x \geqslant 1$,

   $f(x)-\dfrac{1}{x}+1 = \int_0^x \dfrac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t - \dfrac{1}{x}+1$

$= \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$ d'après la question précédente
$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^x \frac{1}{t^2}\,dt$, par relation de Chasles
$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^x \frac{1}{1+t^2} + \frac{1}{t^2}\,dt$, par linéarité de l'intégrale
$= \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt + \int_1^x \frac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)}\,dt.$

(c) Pour tout réel $t \geqslant 1$, on a $\frac{1}{1+t^2} \geqslant 0$ et $\frac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)} \geqslant 0$. Pour tout réel $x \geqslant 1$, d'après la positivité de l'intégrale, $\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \geqslant 0$ et $\int_1^x \frac{1+2t^2}{t^2(1+t^2)} \geqslant 0$. Donc $f(x) - \frac{1}{x} + 1 \geqslant 0$ d'où $f(x) \geqslant \frac{1}{x} - 1$.

Corrigé exercice 98 :

Partie A : Position relative de $\mathscr{C}_f$ et de l'une de ses tangentes

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -e^{-x}$. Une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est alors de la forme $y = f'(0)(x-0) + f(0)$. Or, $f(0) = 1$ et $f'(0) = -1$ donc une équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0 est $y = -x+1$. Cette tangente est donc bien la droite Δ.
2. (a) Pour tout réel x, $h(x) = e^{-x} + x - 1$. Ainsi h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = -e^{-x} + 1$.
   (b) $h'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -e^{-x} + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow e^{-x} \leqslant 1 \Leftrightarrow -x \leqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$. h' est donc positive sur $[0;+\infty[$ et négative sur $]-\infty;0]$.
   (c) D'après la question précédente, h est décroissante sur $]-\infty;0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$.
3. D'après la question précédente, h est minorée par $h(0) = 0$. Donc h est une fonction positive. Ainsi, pour tout réel x, $f(x) \geqslant g(x)$. On en déduit que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de sa tangente Δ sur $\mathbb{R}$, ces deux courbes étant sécantes en $x = 0$.

Partie B : Calcul d'aire

1. h est une fonction continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. h admet donc une primitive. Une telle primitive est $H\colon x \mapsto -e^{-x} + \frac{1}{2}x^2 - x$.
   D'où $\int_0^1 h(x)\,dx = \int_0^1 (e^{-x} + x - 1)\,dx = \left[-e^{-x} + \frac{x^2}{2} - x\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{e}$.
2. (a) D'après la figure, le domaine $\mathscr{D}$ est la réunion du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$, Δ et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 1$, puis du domaine compris entre $\mathscr{C}_f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = a$.
   Ainsi $\mathscr{A} = \int_0^1 [f(x) - g(x)]\,dx + \int_1^a f(x)\,dx = \int_0^1 h(x)\,dx + \int_1^a f(x)\,dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{e} + [-e^{-x}]_1^a = \frac{1}{2} - \frac{1}{e^a}$.
   (b) À l'aide d'une calculatrice, on conjecture que $\lim_{x\to+\infty} \mathscr{A} = \frac{1}{2}$.

Corrigé exercice 99 :

1. Soit un réel $x \in I$. Si $f(x) \geqslant 0$, alors $|f(x)| = f(x)$ et $-|f(x)| = -f(x) \leqslant f(x)$. Donc $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.
   Si $f(x) \leqslant 0$, alors $|f(x)| = -f(x)$ et $-|f(x)| = f(x) \leqslant f(x)$. Donc $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.
   Par disjonction des cas, pour tout réel $x \in I$, $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|$.

2. La fonction f est continue sur I. La fonction $x \mapsto |f(x)|$ est aussi continue sur cet intervalle comme composée de deux fonctions continues sur I. On intègre alors les inégalités précédentes et on obtient $\int_a^b -\left|f(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$. D'où, par linéarité de l'intégrale, $-\int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$. Et donc, on en déduit que $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x$.

Corrigé exercice 100 :

1. f est dérivable sur $[0;1]$ et, pour tout réel $x \in [0;1]$, $f'(x) = \dfrac{(1+x)\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^x}{(1+x)^2} = \dfrac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2} \geqslant 0$. Donc, f est croissante sur $[0;1]$.
2. (a) Soit k un entier compris entre 0 et 4. Alors, pour tout réel $x \in \left[\dfrac{k}{5};\dfrac{k+1}{5}\right]$,
   $0 \leqslant \dfrac{k}{5} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+1}{5} \leqslant 1$ et donc $f\left(\dfrac{k}{5}\right) \leqslant f(x) \leqslant f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$ car f est croissante sur $[0;1]$. De plus f est continue, car dérivable, sur $[0;1]$. On peut donc intégrer les inégalités précédentes sur $\left[\dfrac{k}{5};\dfrac{k+1}{5}\right]$,
   ce qui donne $\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\dfrac{k}{5}\right) \mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f\left(\dfrac{k+1}{5}\right) \mathrm{d}x$
   $\Leftrightarrow \left[f\left(\dfrac{k}{5}\right)x\right]_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \left[f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)x\right]_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}}$
   $\Leftrightarrow \dfrac{1}{5}f\left(\dfrac{k}{5}\right) \leqslant \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x \leqslant \dfrac{1}{5}f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$.

   (b) f est positive sur $[0;1]$, $\int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x$ est donc égale à l'aire du domaine compris entre la courbe représentative de de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = \dfrac{k}{5}$ et $x = \dfrac{k+1}{5}$.
   Les inégalités précédentes signifient alors que l'aire de ce domaine est compris entre celle du rectangle de base $\dfrac{1}{5}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k}{5}\right)$, et celle du rectangle de base $\dfrac{1}{5}$ et de hauteur $f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$.

   (c) On somme les inégalités précédentes pour k allant de 0 à 4, et on obtient alors $\sum\limits_{k=0}^{4} \dfrac{1}{5}f\left(\dfrac{k}{5}\right) \leqslant \sum\limits_{k=0}^{4} \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant$ $\sum\limits_{k=0}^{4} \dfrac{1}{5}f\left(\dfrac{k+1}{5}\right)$. Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\frac{1}{5}\sum\limits_{k=0}^{4} f\left(\frac{k}{5}\right) \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}\sum\limits_{k=0}^{4} f\left(\frac{k+1}{5}\right)$ et donc $\frac{1}{5}S_4 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5}(S_5 - 1)$.

   (d) On calcule S_4 et S_5 à la calculatrice, avec un tableur ou bien encore via un algorithme en Python, et on obtient $S_4 \approx 5,4587$ et $S_5 \approx 6,8178$.

   (e) On déduit de la question d. que $\frac{1}{5} \times 5,4587 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{5} \times (6,8178 - 1)$ et donc que $1,091 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1,164$.
3. (a) Pour tout réel $x \in [0;1]$,
   $1 - x + \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{(1-x)(1+x)+x^2}{1+x} = \dfrac{1-x^2+x^2}{1+x} = \dfrac{1}{1+x}$.

   (b) En multipliant par e^x l'égalité précédente, on obtient $\dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x} = (1-x)\mathrm{e}^x + \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}$. Les fonctions $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}$, $x \mapsto (1-x)\mathrm{e}^x$ et $x \mapsto \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}$ sont continues sur $[0;1]$, on peut donc intégrer les deux membres de l'égalité précédente, ce qui donne $\int_0^1 \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + \int_0^1 \dfrac{x^2\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x = \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x\mathrm{d}x + I$.

(c) On va utiliser une intégration par parties. Pour se faire, on pose $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v(x) = 1-x$. u est donc définie par $u(x) = \mathrm{e}^x$ et, pour tout réel, $v'(x) = -1$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par intégration par parties,
$\int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = [(1-x)\mathrm{e}^x]_0^1 - \int_0^1 -\mathrm{e}^x \mathrm{d}x = -1+\mathrm{e}-1 = \mathrm{e}-2$.

(d) D'après la question 2.e.,
$1,091 \leqslant \int_0^1 f(x)\mathrm{d}x \leqslant 1,164$ d'où $1,091 \leqslant \int_0^1 (1-x)\mathrm{e}^x \mathrm{d}x + I \leqslant 1,164$ et donc, d'après la question précédente, $1,091 \leqslant \mathrm{e}-2+I \leqslant 1,164$. Et on peut ainsi en déduire que $0,3727 \leqslant I \leqslant 0,4458$ et donc que $0,37 \leqslant I \leqslant 0,45$.

Corrigé exercice 101 :

1. (a) La fonction $f\colon x \mapsto \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives. Une primitive de f sur sur $\mathbb{R}$ est $F\colon -\mathrm{e}^{-\lambda x}$. D'où $P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_a^b = \mathrm{e}^{-\lambda a} - \mathrm{e}^{-\lambda b}$.
   (b) De même, $P(0 \leqslant X \leqslant b) = \int_0^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_0^b = 1-\mathrm{e}^{-\lambda b}$.
2. 2 ans correspondent à 24 mois. On doit donc calculer la probabilité $P(6 \leqslant X \leqslant 24)$. D'après la question 1. a., on obtient alors $P(6 \leqslant X \leqslant 24) = \mathrm{e}^{-6\lambda} - \mathrm{e}^{-24\lambda} = \mathrm{e}^{-0,3} - \mathrm{e}^{-1,2} \approx 0,44$.

Corrigé exercice 102 :

1. (a) G est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur cet ensemble et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G'(x) = 2x \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2} = x\mathrm{e}^{x^2} = g(x)$. Donc G est bien une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
   (b) $I_1 = \int_0^1 x\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = [G(x)]_0^1 = G(1)-G(0) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e} - \dfrac{1}{2}$.
   (c) $I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$.
   Posons $u'(x) = x\mathrm{e}^{x^2}$ et $v(x) = x^{n+1}$. D'après la question 1.a., $u = G$. De plus on a $v'(x) = (n+1)x^n$. u et v sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$. u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $\mathbb{R}$. Ainsi, par intégration par parties,
   $I_{n+2} = \left[G(x)x^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$
   $= \left[G(x)x^{n+1}\right]_0^1 - \dfrac{n+1}{2}\int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ par linéarité de l'intégrale
   $= \dfrac{1}{2}\mathrm{e} - \dfrac{n+1}{2}I_n$.
   (d) Grâce à la relation de récurrence, $I_3 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e} - \dfrac{2}{2}I_1 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e} - \dfrac{1}{2}\mathrm{e} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.
   De même, $I_5 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e} - \dfrac{4}{2}I_3 = \dfrac{1}{2}\mathrm{e} - 2\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}\mathrm{e} - 1$.
2. L'algorithme initialise u avec la valeur de I_1, puis il calcule I_3 et ainsi de suite jusqu'à I_{21}. En sortie de cet algorithme on obtient donc I_{21}.
3. (a) Pour tout réel $x \in [0;1]$, $x^n\mathrm{e}^{x^2} \geqslant 0$ donc, par positivité de l'intégrale, pour tout n non nul, $I_n = \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \geqslant 0$.
   (b) Pour tout entier naturel n non nul, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x - \int_0^1 x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$ donc, par linéarité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x-1)x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x$. Or, pour tout réel $x \in [0;1]$, $(x-1)x^n\mathrm{e}^{x^2} \leqslant 0$ donc, par positivité de l'intégrale, $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (x-1)x^n\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant 0$.
   La suite (I_n) est donc décroissante.

(c) À l'aide d'une calculatrice, on conjecture que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

Corrigé exercice 103 :

La fonction $g\colon x \mapsto \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}$ est continue, car dérivable, sur $\mathbb{R}$ et est de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$. Elle admet donc une primitive G de la forme $G = -\dfrac{1}{u}$. Ainsi une primitive de g est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\dfrac{1}{e^x+1}$.
D'où $\int_0^1 \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx = \left[-\dfrac{1}{e^x+1}\right]_0^1 = -\dfrac{1}{e+1} + \dfrac{1}{2}$.

On en déduit que $I = \int_0^1 \dfrac{e^{2x}+3e^x+1}{(e^x+1)^2}\,dx = \int_0^1 \dfrac{(e^x+1)^2+e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$ d'où
$I = \int_0^1 \dfrac{(e^x+1)^2}{(e^x+1)^2}\,dx + \int_0^1 \dfrac{e^x}{(e^x+1)^2}\,dx$ par linéarité de l'intégrale.
Ainsi $I = \int_0^1 1\,dx - \dfrac{1}{e+1} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{e+1}$.

Corrigé exercice 104 :

1. Pour tout réel x,

$$g(x) = f(a) \times \frac{x^2 - \left(b + \frac{a+b}{2}\right)x + b\frac{a+b}{2}}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)}$$
$$+ f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \frac{x^2 - (a+b)x + ab}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)}$$
$$+ f(b) \times \frac{x^2 - \left(a + \frac{a+b}{2}\right)x + a\frac{a+b}{2}}{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)(b-a)}$$

d'où

$$g(x) = \left[\frac{f(a)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + \frac{f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} + \frac{f(b)}{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)(b-a)}\right] x^2$$
$$+ \left[\frac{-f(a)\left(b + \frac{a+b}{2}\right)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + \frac{-(a+b)f\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} + \frac{-f(b)\left(a + \frac{a+b}{2}\right)}{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)(b-a)}\right] x$$
$$+ \left[\frac{f(a)b\frac{a+b}{2}}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + \frac{abf\left(\frac{a+b}{2}\right)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} + \frac{f(b)a\frac{a+b}{2}}{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)(b-a)}\right].$$

Ainsi g est bien une fonction polynôme de degré au plus 2.
De plus,

$$g(a) = f(a) \times \frac{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} + f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \frac{(a-a)(a-b)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} + f(b) \times \frac{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-a)}{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)(b-a)} = f(a) \times \frac{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)}{\left(a - \frac{a+b}{2}\right)(a-b)} = f(a),$$

$$g(b) = f(b) \times \frac{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)(b-a)}{\left(b - \frac{a+b}{2}\right)(b-a)} = f(b) \text{ et}$$

$$g\left(\frac{a+b}{2}\right) = f\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \frac{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)}{\left(\frac{a+b}{2} - a\right)\left(\frac{a+b}{2} - b\right)} = f\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

La fonction g respecte donc bien les conditions :

$$f(a) = g(a),\ f(b) = g(b) \text{ et } f\left(\frac{a+b}{2}\right) = g\left(\frac{a+b}{2}\right).$$

2. On remarque que g_k sont des fonctions vérifiant les conditions de la question 1. pour k variant de 0 à 3 avec $a = \frac{k}{4}$ et $b = \frac{k+1}{4}$, puisque $\frac{\frac{k}{4} + \frac{k+1}{4}}{2} = \frac{2k+1}{8}$.
On détermine alors, grâce à la formule de la question 1., l'expression des polynômes à intégrer. Ces fonctions polynomiales sont définies sur $\mathbb{R}$ par $g_0(x) = \frac{3}{8}x^2 + \frac{31}{32}x - 1$, $g_1(x) = \frac{9}{8}x^2 + \frac{19}{32}x - \frac{61}{61}$, $g_2(x) = \frac{15}{8}x^2 - \frac{5}{32}x - \frac{49}{64}$ et $g_3(x) = \frac{21}{8}x^2 - \frac{41}{32}x - \frac{11}{32}$.
On calcule ensuite les intégrales de ces fonctions en cherchant une de leurs primitives, et on obtient $\int_0^{0,25} g_0(x)\,\mathrm{d}x = -0,22$, $\int_{0,25}^{0,5} g_1(x)\,\mathrm{d}x = -0,14$, $\int_{0,5}^{0,75} g_2(x)\,\mathrm{d}x = -0,03$ et $\int_{0,75}^{1} g_3(x)\,\mathrm{d}x = 0,14$. D'où $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx -0,25$.
Remarque : Cette méthode est, bien entendu, utile lorsque l'intégrale de départ n'est pas calculable. Dans le cas de cet exercice, afin de le simplifier, la fonction f de départ est suffisamment simple pour que l'on puisse calculer directement cette intégrale sans avoir à l'approximer par la méthode de Simpson.

Corrigé exercice 105 :

Partie A

1. (a) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = +\infty$, car $x > 0$, donc, par composition, $\lim_{x\to 0} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$. De plus, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$. Ainsi, par produit, on en déduit que $\lim_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
   (b) $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc, par composition, $\lim_{x\to +\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$. De plus, $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$. On en déduit, par produit, que $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$.
   (c) On peut en déduire que la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées, est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$, et que la droite d'équation $y = 0$, c'est-à-dire l'axe des abscisses, est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ comme composée et produit de fonctions définies et dérivables sur cet intervalle. Pour tout réel $x>0$, $f'(x)=-\dfrac{2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}}-\dfrac{1}{x^2}\times\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=-\dfrac{2x+1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}=-\dfrac{1}{x^4}e^{\frac{1}{x}}(2x+1)$.

(b) Pour tout $x>0$, $\dfrac{1}{x^4}>0$, $e^{\frac{1}{x}}>0$ et $2x+1>0$. Donc, f' est strictement négative sur $]0;+\infty[$ et donc f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

(c) f est dérivable, donc continue, sur $]0;+\infty[$. De plus f est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ et 2 appartient à l'intervalle $\left]\lim\limits_{x\to+\infty}f(x);\lim\limits_{x\to0}f(x)\right[$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=2$ admet une unique solution α.
D'après une calculatrice, on obtient $f(1,109)\approx2,003$ et $f(1,11)\approx1,99$ d'où $1,109<\alpha<1,11$. Ainsi une valeur approchée arrondie au centième de α est 1,11.

Partie B : Étude d'une suite d'intégrales

1. La fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$ est continue sur $[1;2]$, elle admet donc des primitives sur cet intervalle. Une telle primitive est $x\mapsto -e^{\frac{1}{x}}$.
D'où $I_2=\int_1^2\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}=\left[-e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2=e-e^{\frac{1}{2}}$.

2. (a) Soit entier naturel $n\geqslant2$. On pose $u'(x)=\dfrac{1}{x^n}$ et $v(x)=e^{\frac{1}{x}}$. u et v sont dérivables sur $[1;2]$, avec $u(x)=-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{x^{n-1}}$ et $v'(x)=-\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. u' et v' sont dérivables, donc continues, sur $[1;2]$. Par intégration par parties, on a alors $I_n=\left[-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{x^{n-1}}e^{\frac{1}{x}}\right]_1^2-\int_1^2\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{x^{n-1}}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

$=\left[-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{2^{n-1}}e^{\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{n-1}e\right]-\dfrac{1}{n-1}\int_1^2\dfrac{1}{x^{n+1}}e^{\frac{1}{x}}\,dx$

$=\left[-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{2^{n-1}}\sqrt{e}+\dfrac{1}{n-1}e\right]-\dfrac{1}{n-1}I_{n+1}$ puisque $e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$.

D'où $\dfrac{1}{n-1}I_{n+1}=\left[-\dfrac{1}{n-1}\times\dfrac{1}{2^{n-1}}\sqrt{e}+\dfrac{1}{n-1}e\right]-I_n$.

Et ainsi $I_{n+1}=e-\dfrac{\sqrt{e}}{2^{n-1}}+(1-n)I_n$.

(b) On utilise la formule précédente en prenant $n=2$. On obtient alors $I_3=e-\dfrac{\sqrt{e}}{2}-I_2=e-\dfrac{\sqrt{e}}{2}-\left(e-e^{\frac{1}{2}}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$.

3. (a) Pour tout réel x tel que $1\leqslant x\leqslant2$, $0<\dfrac{1}{2}\leqslant\dfrac{1}{x}\leqslant1$, par stricte décroissance de la fonction inverse sur $]0;+\infty[$, donc $0<e^{\frac{1}{x}}\leqslant e$ par stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$. De plus $\dfrac{1}{x^n}>0$, d'où $0<\dfrac{1}{x^n}e^{\frac{1}{x}}\leqslant\dfrac{e}{x^n}$.

(b) La fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}$ est continue sur $]0;+\infty[$, on intègre donc les inégalités précédentes sur $[1;2]$. Et on obtient alors $0 < I_n \leqslant \int_1^2 \dfrac{\mathrm{e}}{x^n}\,\mathrm{d}x$ d'où $0 < I_n \leqslant \left[-\dfrac{1}{n-1} \times \dfrac{\mathrm{e}}{x^{n-1}}\right]_1^2$ et donc $0 < I_n \leqslant \dfrac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

De plus $2 > 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ donc, par addition, $\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\dfrac{1}{2^{n-1}} = 1$. De plus $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n-1} = 0$.

D'où, par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}}{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, on conclut que la suite (I_n) converge vers 0.

Corrigé exercice 106 :

1. I correspond à l'aire du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}_{f'}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.
2. (a) Pour tout $x \in [0;5]$,
$$f'(x) = (2x+2)\times\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2+2x\right)\times\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(2x+2-x^2-2x\right) = \left(-x^2+2\right)\mathrm{e}^{-x}.$$
   (b) Pour tout réel $x \in [0;5]$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$. $f'(x)$ est donc du signe de $\left(-x^2+2\right)$. On obtient ainsi le tableau de variations ci-dessous.
   L'abscisse du maximum de f sur $[0;5]$, est donc $\sqrt{2}$.
   (c) Le maximum de f vaut $f\left(\sqrt{2}\right) = (2+2\sqrt{2})\mathrm{e}^{-\sqrt{2}} \approx 1,174$.
3. La fonction f' est dérivable, donc continue, sur $[0;1]$. Une primitive de f' est f. Ainsi $\int_0^1 f'(x)\,\mathrm{d}x = \left[f(x)\right]_0^1 = f(1)-f(0) = f(1)$, car $f(0)=0$. Les deux valeurs sont donc bien égales.
4. De même $\int_0^1 f''(x)\,\mathrm{d}x = \left[f'(x)\right]_0^1 = f'(1)-f'(0) = f'(1)-2$.

Corrigé exercice 107 :

Partie A

1. Pour tout $x \in [0;4]$, $f'(x) = 3,6\mathrm{e}^{-0,6x} + (3,6x+2,4)\times(-0,6)\mathrm{e}^{-0,6x}$
$= (3,6-2,16x-1,44)\mathrm{e}^{-0,6x}$
$= (-2,16x+2,16)\mathrm{e}^{-0,6x}$.
2. (a) Sur $[0;4]$, $\mathrm{e}^{-0,6x} > 0$, donc f' est du signe de $-2,16x+2,16$. Or $-2,16x+2,16 > 0 \Leftrightarrow x < 1$. Ainsi $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$, $f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 1$ et $f'(x) < 0 \Leftrightarrow x > 1$.
   (b) D'après la question précédente, on obtient le tableau de variations ci-dessous.
3. $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^4 = F(4)-F(0) = 8,4-38\mathrm{e}^{-2,4} \approx 4,95$.

Partie B

1. g est continue sur $[0;4]$. g admet donc des primitives sur $[0;4]$. Une primitive de g est G définie sur $[0;4]$ par $G(x) = \dfrac{4x^3}{3} - 2x^2 + x$.
D'où $\int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x = G(0,5)-G(0) = \dfrac{1}{6}$.
2. L'aire du domaine grisé est égale à 2 fois l'aire du domaine grisé situé au-dessus de l'axe des abscisses. Cette dernière a pour aire, en u.a., $\int_0^4 f(x)\,\mathrm{d}x - \int_0^{0,5} g(x)\,\mathrm{d}x$, puisqu'il s'agit de l'aire du domaine compris sous la courbe représentative de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$, à laquelle

on soustrait l'aire du domaine compris sous la courbe représentative de g, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=0$ et $x=1$.

On a $\int_0^4 f(x)\mathrm{d}x - \int_0^{0,5} g(x)\mathrm{d}x = 8,4-38\mathrm{e}^{-2,4}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{247}{30}-38\mathrm{e}^{-2,4}$. L'aire du domaine grisé vaut donc $2\times\left(\dfrac{247}{30}-38\mathrm{e}^{-2,4}\right)=\dfrac{247}{15}-76\mathrm{e}^{-2,4}\approx 9,57$ u.a..

Corrigé exercice 108 :

1. (a) La fonction $x\mapsto 2xy$ est continue, car dérivable, sur $[-1;2]$. Elle admet pour primitive $x\mapsto yx^2$. Donc $\int_{-1}^2 2xy\mathrm{d}x=\left[yx^2\right]_{-1}^2=3y$.

   (b) La fonction $y\mapsto 3y$ est continue, car dérivable, sur $[0;1]$. Elle admet pour primitive $y\mapsto\dfrac{3}{2}y^2$. Donc $\int_0^1 3y\,\mathrm{d}y=\left[\dfrac{3y^2}{2}\right]_0^1=\dfrac{3}{2}$.

2. Pour calculer $\iint_{\mathscr{D}} xy\mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, on calcule en premier $\int_0^1 xy\mathrm{e}^{x+2y}\,\mathrm{d}x$, où y est un réel fixé. On pose alors $u_1'(x)=\mathrm{e}^{x+2y}$ et $v_1(x)=xy$. Ainsi u_1 est donc définie par $u_1(x)=\mathrm{e}^{x+2y}$ et, de plus, on a $v_1'(x)=y$. u_1 et v_1 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_1' et v_1' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on a alors $\int_0^1 xy\mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x=\left[xy\mathrm{e}^{x+2y}\right]_0^1-\int_0^1 y\mathrm{e}^{x+2y}\mathrm{d}x=y\mathrm{e}^{1+2y}-\left[y\mathrm{e}^{x+2y}\right]_0^1=y\mathrm{e}^{2y}$.

   On calcule maintenant $\int_{-2}^3 y\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y$. On pose $u_2'(y)=\mathrm{e}^{2y}$ et $v_2(y)=y$. u_2 est donc définie par $u_2(y)=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}$ et on a $v_2'(y)=1$. u_2 et v_2 sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u_2' et v_2' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$. Par intégration par parties, on a alors $\int_{-2}^3 y\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y=\left[\frac{1}{2}y\mathrm{e}^{2y}\right]_{-2}^3-\int_{-2}^3\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y}\mathrm{d}y=\frac{3}{2}\mathrm{e}^6+\mathrm{e}^{-4}-\left[\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2y}\right]_{-2}^3=\frac{5}{4}\mathrm{e}^6+\frac{5}{4}\mathrm{e}^{-4}$.

Corrigé exercice 109 :

1. L'aire d'un trapèze se calcule à l'aide de la formule $\dfrac{(B+b)\times h}{2}$. Ainsi l'aire du trapèze T_k est égal à $\dfrac{\left[f\left(\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)\right]\times\frac{1}{n}}{2}=\dfrac{f\left(\frac{k}{n}\right)+f\left(\frac{k+1}{n}\right)}{2n}$.
2. L'algorithme ci-dessous fonctionne, par exemple.

   $T\leftarrow 0$
   Pour k allant de 0 à $n-1$:
   $T\leftarrow T+\dfrac{\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}+\frac{1}{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}}{2n}$
   Fin Pour
   Retourner T

3. On peut programmer cet algorithme en Python comme ci-dessous. On obtient ainsi $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\approx 0,752$.
4. Il suffit de changer la ligne 3 de l'algorithme en :

$$T\leftarrow T+\frac{\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}}+\dfrac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{k+1}{n}\right)^2}}}{2n}.$$

Remarque : Il est possible d'utiliser cet exercice afin de faire comparer aux élèves les méthodes des rectangles, des milieux et des trapèzes.

Corrigé exercice 110 :

1. Les conditions nécessaire sont $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)$.
2. (a) Cet algorithme calcule la proportion de points M appartenant au domaine hachuré en bleu.
   (b) Voici l'algorithme en langage Python.
   On en déduit que $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \approx 0,293$.

Corrigé exercice 111 :

Soit x un réel non nul et soit $n \in \mathbb{N}$.

On note alors P_n la proposition : « $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t$ ». On va alors démontrer, par récurrence, que P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Initialisation : Si $n = 0$,
$\sum\limits_{k=0}^{0} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^0 \mathrm{e}^t}{0!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^0}{0!} + \int_0^x \frac{(x-t)^0 \mathrm{e}^t}{0!}\,\mathrm{d}t = 1 + \int_0^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = 1 + \mathrm{e}^x - 1 = \mathrm{e}^x$.
Ainsi P_0 est bien vraie.

Hérédité : On considère un entier naturel k quelconque tel que P_k est vraie, autrement dit tel que $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{p=0}^{k} \frac{x^p}{p!} + \int_0^x \frac{(x-t)^k \mathrm{e}^t}{k!}\,\mathrm{d}t$. On souhaite démontrer que P_{k+1} est vraie, autrement dit que $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{p=0}^{k+1} \frac{x^p}{p!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{k+1} \mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t$.

Par hypothèse de récurrence, $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{p=0}^{k} \frac{x^p}{p!} + \int_0^x \frac{(x-t)^k \mathrm{e}^t}{k!}\,\mathrm{d}t$.

On va réécrire le deuxième membre de l'égalité à l'aide d'une intégration par parties. Pour se faire, on pose $u'(t) = \frac{(x-t)^k}{k!}$ et $v(t) = \mathrm{e}^t$. u est alors définie par $u(t) = -\frac{1}{(k+1)} \frac{(x-t)^{k+1}}{k!} = \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!}$ et on a, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $v'(t) = \mathrm{e}^t$. Or, u et v sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$, et u' et v' sont dérivables, donc continues sur $\mathbb{R}$.

Ainsi, par intégration par parties,
$\int_0^x \frac{(x-t)^k \mathrm{e}^t}{k!}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{(x-t)^{k+1} \mathrm{e}^t}{(k+1)!}\right]_0^x + \int_0^x \frac{(x-t)^{k+1} \mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t = \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{k+1} \mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t$.

D'où, $\mathrm{e}^x = \sum\limits_{p=0}^{k} \frac{x^p}{p!} + \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{k+1} \mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t = \sum\limits_{p=0}^{k+1} \frac{x^p}{p!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{k+1} \mathrm{e}^t}{(k+1)!}\,\mathrm{d}t$.

Donc P_{k+1} est aussi vraie.

D'où, en conclusion, par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n est vraie c'est-à-dire
$\mathrm{e}^x = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n \mathrm{e}^t}{n!}\,\mathrm{d}t$.