

Correction des exercices de type bac sur les intégrales

Exercice I

Pour tout entier naturel n , on pose :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx.$$

f_n désigne la fonction définie sur $[0; 1]$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}.$$

\mathcal{C}_n désigne la courbe de f_n .

On a tracé $\mathcal{C}_0, \mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ et \mathcal{C}_4 dans un repère orthonormé.

1) u_n représente l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses, la courbe \mathcal{C}_n , la droite d'équation $x = 0$ et celle d'équation $x = 1$.

On conjecture alors que la suite (u_n) est croissante.

2) Pour tout n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \int_0^1 \frac{1}{1+x^{n+1}} dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \\ &= \int_0^1 \left[\frac{1}{1+x^{n+1}} - \frac{1}{1+x^n} \right] dx \text{ (par linéarité)} \\ &= \int_0^1 \frac{1+x^n - 1 - x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n - x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)} dx. \end{aligned}$$

$\forall x \in [0; 1], x^n \geq 0, (1+x^{n+1})(1+x^n) \geq 0$ et $1-x \geq 0$. $u_{n+1} - u_n$ est l'intégrale d'une fonction positive, donc par positivité, c'est un nombre positif.

On en déduit que la suite (u_n) est **croissante**.

3) $\forall x \in [0; 1], x^n \geq 0 \Rightarrow 0 \leq 1+x^n \leq 1 \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1 \Rightarrow 0 \leq u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx \leq \int_0^1 1 dx = 1$.

Donc, pour tout n , $u_n \leq 1$

4) La suite (u_n) est croissante et majorée par 1; elle est **convergente**, d'après le théorème de convergence monotone.

Exercice II

On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$.

- 1) f est clairement définie sur $]0; +\infty[$ car $t \neq 0$ sur cet intervalle.
 f est dérivable sur cet intervalle comme quotient de fonctions dérivables.



Remarque

Notons g une fonction définie et continue sur $]0; +\infty[$ dont une primitive est G .

Soit $f(x) = \int_1^x g(t) dt$. Par propriété, $f(x) = G(x) - G(1)$.

Alors : $f'(x) = G'(x) - 0$ car $G(1)$ est une constante et $G'(x) = g(x)$ donc $f'(x) = g(x)$.

f est donc une primitive de g .

Ici, on a $g(t) = \frac{e^t}{t}$ donc $f'(x) = g(x) = \frac{e^x}{x}$

- 2) $\forall x \in]0; +\infty[, \frac{e^x}{x} > 0$ donc $f'(x) \geq 0$.

Alors : f est croissante sur $]0; +\infty[$.

Remarque : $f(1) = \int_1^1 \frac{e^t}{t} dt$ donc $f(1) = 0$.

Tableau de variation et de signes

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$			
$f(x)$	-	0	+

- 3) $\forall t \in]0; +\infty[, e^t \geq 1$ donc, en divisant par $t \geq 0$, $\frac{e^t}{t} \geq \frac{1}{t}$

- 4) Par comparaison, en en déduit :

$$\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \geq \int_1^x \frac{1}{t} dt \iff f(x) \geq [\ln(t)]_1^x = \ln(x).$$

Donc : pour tout $x \in]1; +\infty[, f(x) \geq \ln(x)$.

- 5) On suppose que $x \in]0; 1]$.

On a toujours : $\frac{e^t}{t} \geq \frac{1}{t}$.

\triangle : Pour appliquer la conservation de l'ordre avec les intégrales, il faut que la borne inférieure de l'intégrale soit inférieure à l'autre borne.

$$\text{Donc : } \int_x^1 \frac{e^t}{t} dt \leq \int_x^1 \frac{1}{t} dt$$

$$\iff -\int_1^x \frac{e^t}{t} dt \leq -\int_1^x \frac{1}{t} dt \iff -f(x) \geq -\ln(x) \iff f(x) \leq \ln(x)$$

- 6) • Pour $x \geq 1$, $f(x) \geq \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

- Pour $0 < x \leq 1$, $f(x) \leq \ln(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, donc, par comparaison, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$