Exercices de baccalauréat sur la fonction logarithme

I Centres étrangers mai 2022 sujet 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x\ln(x) + 1$$

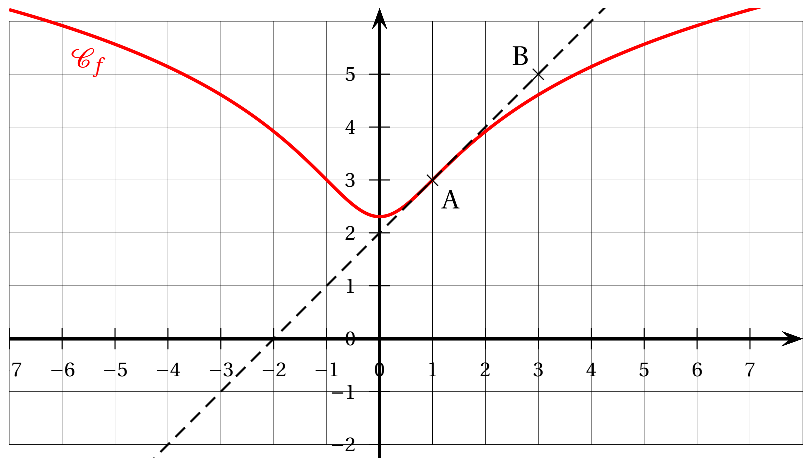
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. (a) On admet que f est dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
   Montrer que pour tout réel x strictement positif :
   $$f'(x) = 1 + \ln(x).$$
   (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0\,;\,+\infty[$ et les limites.
   (c) Justifier que pour tout $x \in]0\,;\,1[$, $f(x) \in]0\,;\,1[$.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0\,;\,+\infty[$.
   (c) En déduire que pour tout réel x strictement positif :
   $$f(x) \geqslant x$$
4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0\,;\,1[$ et pour tout entier naturel n :
   $$u_{n+1} = f(u_n)$$
   (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $0 < u_n < 1$.
   (b) Déduire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n).
   (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

II Asie mai 2022 sujet 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On considère les points A(1 ; 3) et B(3 ; 5).

On donne ci-dessous $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A.



Les trois parties de l'exercice peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie A

1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
2. La fonction f est définie par l'expression $f(x) = \ln\left(ax^2+1\right) + b$, où a et b sont des nombres réels positifs.
   (a) Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   (b) Déterminer les valeurs de a et b à l'aide des résultats précédents.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(x^2+1\right) + 3 - \ln(2).$$

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
   Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f, donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur R par $f(x) = \ln\left(x^2+1\right)+3-\ln(2)$.

1. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}_f$.
2. Montrer que, pour tout nombre réel x, on a : $f''(x) = \dfrac{2\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$.
3. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.

III Antilles-Guyane juin 2017

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel strictement positif. Le but de l'exercice est d'étudier l'équation

$$(E_n): \qquad \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{n}$$

ayant pour inconnue le nombre réel strictement positif x.

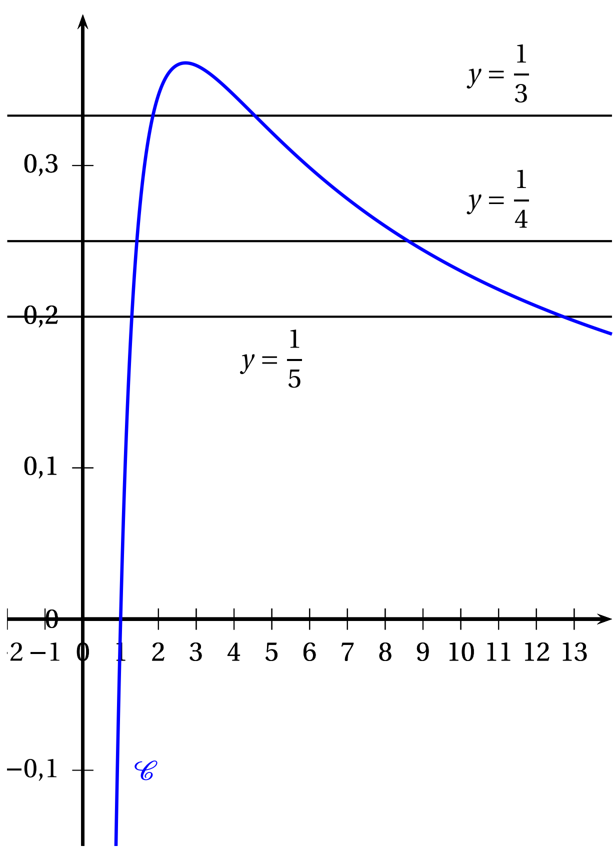
Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0~;~+\infty[$.

On donne ci-dessous la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ de la fonction f dans un repère orthogonal.



1. Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer son maximum.

Partie B

1. Montrer que, pour $n \geqslant 3$, l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ possède une unique solution sur $[1~;~\mathrm{e}]$ notée α_n.
2. D'après ce qui précède, pour tout entier $n \geqslant 3$, le nombre réel α_n est solution de l'équation (E_n).
   (a) Sur le graphique sont tracées les droites D_3, D_4 et D_5 d'équations respectives : $y = \dfrac{1}{3}$, $y = \dfrac{1}{4}$, $y = \dfrac{1}{5}$.
   Conjecturer le sens de variation de la suite (α_n).
   (b) Comparer, pour tout entier $n \geqslant 3$, $f(\alpha_n)$ et $f(\alpha_{n+1})$.
   Déterminer le sens de variation de la suite (α_n).
   (c) En déduire que la suite (α_n) converge.
   Il n'est pas demandé de calculer sa limite.
3. On admet que, pour tout entier $n \geqslant 3$, l'équation (E_n) possède une autre solution β_n telle que

$$1 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{e} \leqslant \beta_n.$$

   (a) On admet que la suite $\left(\beta_n\right)$ est croissante.
   Établir que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3,

$$\beta_n \geqslant n\frac{\beta_3}{3}.$$

   (b) En déduire la limite de la suite $\left(\beta_n\right)$.