

Correction de la feuille d'exercices (2)

Exercice I Centres étrangers mai 2022 sujet 2

Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x \ln(x) + 1$.

1. • $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x) = 0$ (d'après les formules de croissances comparées) donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. (a) La fonction f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

En utilisant le formule de la dérivée d'un produit, pour tout $x \in]0; +\infty[$,

$$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1.$$

(b) $f'(x) \geq 0 \iff \ln(x) + 1 \geq 0 \iff \ln(x) \geq -1 \iff x \geq e^{-1} = \frac{1}{e}$.

$$f(e^{-1}) = e^{-1} \ln(e^{-1}) + 1 = -e^{-1} + 1 = 1 - e^{-1} > 0$$

Tableau de variation :

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$f'(x)$	-	\emptyset	+
$f(x)$	1	$1 - e^{-1}$	$+\infty$

(c) $f(1) = 1$. D'après les variations de la fonction f ,

— $\forall x \in]0; e^{-1}], f(x) \in [1 - e^{-1}; 1];$

— $\forall x \in [e^{-1}; 1], f(x) \in [1 - e^{-1}; 1].$

Donc pour tout $x \in]0; 1], f(x) \in [1 - e^{-1}; 1]$. Or $1 - e^{-1} > 0$ donc pour tout réel x dans $]0; 1]$ $f(x) \in]0; 1]$.

3. (a) L'équation de la tangente (T) à \mathcal{C}_f au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

Avec $f'(1) = 1$ et $f(1) = 1$, on en déduit l'équation de (T) : $y = x - 1 + 1 = x$:

' L'équation de (T) est $y = x$.

(b) Nous savons que pour tout $x \in]0; +\infty[, f'(x) = \ln(x) + 1$.

La fonction f' est dérivable sur $]0; +\infty[,$ et $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$, donc f est **convexe** sur $]0; +\infty[$.

(c) La courbe représentative d'une fonction convexe est toujours au-dessus de toutes ses tangentes. Donc \mathcal{C}_f est au-dessus de (T) . Donc $\forall x \in]0; +\infty[, f(x) \geq x$.

4. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 \in]0; 1]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

(a) Montrons par récurrence que $0 < u_n < 1$ pour tout entier naturel n .

Initialisation : $u_0 \in]0; 1]$ (par définition).

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n < 1$. Montrons que $0 < u_{n+1} < 1$.

D'après la question 2.c, $x \in]0; 1[, f(x) \in]0; 1[$.

Or d'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \in]0; 1[,$ donc $f(u_n) \in]0; 1[$ soit $u_{n+1} \in]0; 1[$.

Conclusion : La relation est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang $n \in \mathbb{N}$ elle est vraie au rang suivant $n + 1$; d'après l'axiome de récurrence, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 1$.

(b) D'après la question 3.c, pour tout réel x positif, $f(x) > x$.

De plus pour tout entier naturel n , $u_n > 0$

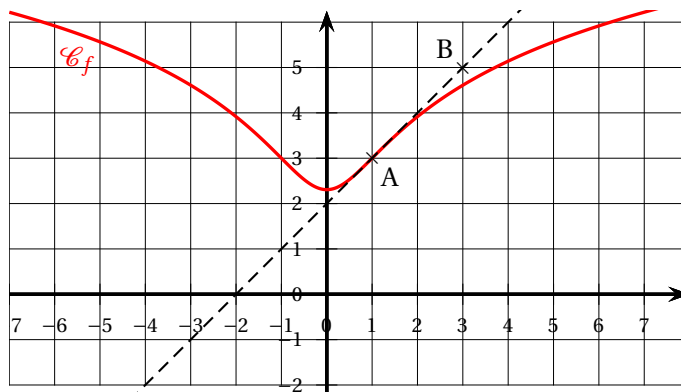
Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) > u_n$ donc $u_{n+1} > u_n$. La suite (u_n) est donc **croissante**.

(c) La suite (u_n) est **croissante et majorée** par 1. Donc d'après le **théorème de convergence monotone**, la suite (u_n) converge vers une limite finie notée ℓ .

Exercice II Asie mai 2022 sujet 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur \mathbb{R} . On considère les points $A(1; 3)$ et $B(3; 5)$.

On donne ci-contre \mathcal{C}_f la courbe représentative de f dans un repère orthogonal du plan, ainsi que la tangente (AB) à la courbe \mathcal{C}_f au point A.



Partie A

- On lit sur le graphique : $f(1) = 3$ et $f'(1) = 1$ (nombre dérivé égal au coefficient directeur de la droite (AB)).
- (a) Comme $a \geq 0$ et $x^2 \geq 0$, on a $ax^2 \geq 0$, donc $ax^2 + 1 \geq 1 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur \mathbb{R} et sur cet

intervalle $f'(x) = \frac{2ax}{ax^2 + 1}$ car si $f(x) = \ln(u(x))$, $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

(b) Les résultats du 1. peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} f(1) = 3 \\ f'(1) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \ln(a+1) + b = 3 \\ \frac{2a}{a+1} = 1 \end{cases}$$

La deuxième équation donne $2a = a + 1 \iff a = 1$ et en reportant dans la première :

$$\ln(1+1) + b = 3 \iff b = 3 - \ln 2.$$

On a donc sur \mathbb{R} , $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln 2$.

Partie B

On admet que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

- Quel que soit le réel x , $f(-x) = \ln[(-x)^2 + 1] + 3 - \ln 2 = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = f(x)$. La fonction f est donc **paire** (la représentation graphique de f est donc **symétrique** par rapport à l'axe des ordonnées).
- On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + 1 = +\infty$ et par composition $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(ax^2 + 1) = +\infty$ et enfin

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

La fonction étant paire $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

- Comme $x^2 + 1 > 0$ quel que soit le réel x , la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et sur cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}. \quad (\text{on peut remplacer } a \text{ par } 1 \text{ dans le calcul de } f'(x) \text{ effectué précédemment.})$$

Le dénominateur étant supérieur à zéro le signe de $f'(x)$ est donc celui de $2x$, donc :

$$f'(x) < 0 \text{ sur } \mathbb{R}_-^* \text{ et } f'(x) > 0 \text{ sur } \mathbb{R}_+^*.$$

Conclusion : f est décroissante sur \mathbb{R}_-^* et croissante sur \mathbb{R}_+^* .

Le nombre $f(0) = \ln 1 + 3 - \ln 2 = 3 - \ln 2$ est donc le minimum de la fonction sur \mathbb{R} . **Tableau de variation**

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	\emptyset	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$3 - \ln(2)$	$+\infty$

4. D'après le tableau de variations l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions si $k > 3 - \ln 2$.

Comme f est paire, ces deux solutions sont opposées.

5. $f(x) = 3 + \ln 2 \iff \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2) = 3 + \ln(2) \iff \ln(x^2 + 1) = 2 \ln(2)$

$\iff \ln(x^2 + 1) = \ln 4 \iff x^2 + 1 = 4$ (par croissance de la fonction logarithme), soit $x^2 = 3$, d'où deux solutions

$$\mathcal{S} = \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}.$$

Partie C

On rappelle que la fonction f est définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2)$.

1. Une courbe admet un point d'inflexion si, en ce point, celle-ci traverse sa tangente en ce point.

Il semble qu'il y ait deux points d'inflexion aux points d'abscisses -1 et 1 .

2. Comme $f'(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$ soit le quotient de deux fonctions dérivables sur \mathbb{R} , le dénominateur étant non nul; f' est donc dérivable sur \mathbb{R} et :

$$f''(x) = \frac{2(x^2 + 1) - 2x \times 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2 - 4x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2} \text{ donc } f''(x) = \frac{2(1+x)(1-x)}{(x^2+1)^2 - 2}.$$

3. On a donc $f''(x) = 0 \iff 1 - x^2 = 0 \iff (1+x)(1-x) = 0$ Donc $\mathcal{S} = \{-1; 1\}$.

La dérivée seconde est positive quand le trinôme $1 - x^2$ est positif soit sur l'intervalle $] -1; 1[$.

Donc la fonction f est convexe sur $] -1; 1[$.

Exercice III Antilles-Guyane juin 2017

Partie A

1. Pour tout réel $x \in]0; +\infty[$, on a $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

Comme $x^2 > 0$, $f'(x)$ a donc le même signe que $1 - \ln(x)$. Or :

$$1 - \ln(x) \geq 0 \iff 1 \geq \ln(x) \iff e \geq x$$

Par ailleurs, on a $f(x) = \ln(x) \times \frac{1}{x}$ donc on a $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$ (pas de forme indéterminée).

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ (par croissances comparées) et } f(e) = \frac{\ln(e)}{e} = \frac{1}{e}.$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	\emptyset	$-$
$f(x)$	$-\infty$	$\left(\frac{1}{e}\right)$	0

Remarque : les limites n'étaient pas exigées dans l'énoncé.

2. D'après le tableau de variation précédent, la fonction f a pour maximum $\frac{1}{e}$ et ce maximum est atteint en $x = e$.

Partie B

1. Soit n un entier tel que $n \geq 3$, alors $0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \leq \frac{1}{e}$.

- Sur l'intervalle $[1; e]$, la fonction f est continue.
- $f(1) = 0$
- $f(e) = \frac{1}{e}$

$n \geq 3; 3 > e$ donc $\frac{1}{e} > \frac{1}{n}$.

$\frac{1}{n}$ est donc compris entre 0 et $\frac{1}{e}$.

D'après le **théorème des valeurs intermédiaires**, l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet au moins une solution sur l'intervalle $[1; e]$.

Comme f est croissante sur cet intervalle, cette solution est unique. On la note α_n avec $\alpha_n \in [1; e]$.

2. (a) Les abscisses inférieures à e des points d'intersection entre les droites D_3, D_4, D_5 et la courbe \mathcal{C} sont les nombres α_3, α_4 et α_5 . Graphiquement, on lit que $\alpha_3 > \alpha_4 > \alpha_5$, il semble donc que la suite (α_n) soit décroissante.

(b) Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Par définition de la suite (α_n) , on a $f(\alpha_n) = \frac{1}{n}$ et $f(\alpha_{n+1}) = \frac{1}{n+1}$. Comme

$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$, on a donc $f(\alpha_{n+1}) < f(\alpha_n)$.

Comme la fonction f est croissante sur $[1; e]$, les images sont classées dans le même ordre que les antécédents.

Par conséquent : $\alpha_{n+1} < \alpha_n$, ce qui prouve que la suite (α_n) est décroissante.

(c) La suite (α_n) est décroissante, minorée (par 1), elle est donc **convergente**.

3. (a) Soit n un entier tel que $n \geq 3$. Par définition de β_n , on a :

$$f(\beta_n) = \frac{1}{n} \iff \frac{\ln(\beta_n)}{\beta_n} = \frac{1}{n} \iff \ln(\beta_n) = \frac{\beta_n}{n}.$$

La suite (β_n) est croissante, donc, pour tout entier naturel $n \geq 3$ on a $\beta_n \geq \beta_3 > 0$. La fonction \ln étant croissante sur $]0; +\infty[$, ceci implique que $\ln(\beta_n) \geq \ln(\beta_3)$, c'est-à-dire que

$\frac{\beta_n}{n} \geq \frac{\beta_3}{3}$.

On en déduit que $\beta_n \geq n \frac{\beta_3}{3}$.

(b) $\beta_3 > 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{\beta_3}{3} = +\infty$.

Par comparaison à l'infini, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = +\infty$.