

# Rappels et compléments sur la dérivation

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Composée de deux fonctions</b> . . . . .	1
I.1	Exemple : . . . . .	1
I.2	Notations . . . . .	1
I.3	Exercice . . . . .	2
<b>II</b>	<b>Dérivée de la composée de quelques fonctions :</b> . . . . .	2
II.1	Dérivée de $f \circ g$ . . . . .	2
II.2	Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ . . . . .	2
II.3	Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$ , $n \in \mathbb{N}^*$ . . . . .	3
II.4	Dérivée de $\frac{1}{u}$ . . . . .	3
II.5	Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$ . . . . .	3
II.6	Dérivée de $e^u$ . . . . .	4
<b>III</b>	<b>Convexité d'une fonction</b> . . . . .	4
III.1	Activité B page 1 . . . . .	4
III.2	Fonction convexe . . . . .	4
III.3	Point d'inflexion . . . . .	6
III.4	Exemple 1 . . . . .	7
III.5	Exemple 2 . . . . .	8

## I Composée de deux fonctions

### I.1 Exemple :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ .

Si on veut calculer  $f(3)$ , on commence par calculer  $3^2$  **puis**  $\frac{1}{3^2}$ .

Schématiquement :  $f : x \mapsto x^2 \mapsto \frac{1}{x^2}$ .

On applique donc d'abord la fonction carré, puis la fonction inverse. On dit qu'on a commencé la fonction carré par la fonction inverse.

### I.2 Notations

Notons  $u$  la fonction carré :  $u(x) = x^2$  et  $v$  la fonction inverse :  $v(x) = \frac{1}{x}$ .

Schématiquement :  $f : x \xrightarrow{u} x^2 \xrightarrow{v} \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2}$ .

On note :  $f = v \circ u$ , composée de  $u$  par  $v$ .

Donc :  $v \circ u(x) = v(u(x))$ .

$\triangleleft$  : on commence par la fonction écrite la plus à droite.

### I.3 Exercice

Écrire les fonctions suivantes comme composée de deux fonctions :

a  $f(x) = (x^2 + 3x + 5)^2$

b  $g(x) = e^{x^2+3}$

c  $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$

## II Dérivée de la composée de quelques fonctions :

### II.1 Dérivée de $f \circ g$



#### Théorème admis

Soit  $g$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$  et à valeurs dans  $J$  et  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $J$ .

Alors  $f \circ g$  est dérivable et  $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$ .

Pour tout  $x \in I$ ,  $(f \circ g)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$ .

**Démonstration :** Soit  $x_0$  un réel de l'intervalle  $I$ .

On doit montrer que  $\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0}$  admet une limite finie quand  $x$  tend vers  $x_0$ .

Or : 
$$\frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \times \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$$

$g$  est dérivable en  $x_0$  donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$ .

$g$  est continue en  $x_0$ , donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$ .

$f$  est dérivable en  $f(x_0)$  donc  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = f'(g(x_0)) = f' \circ g(x_0)$ .

On en déduit que :  $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$

### II.2 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$



#### Propriété

Soit  $u$  une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle  $I$ , de fonction dérivée  $u'$ .

La fonction  $f$  définie sur  $I$  par  $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est dérivable en tout nombre  $x$  tel que  $u(x) \neq 0$  et

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

On applique la formule de dérivations d'une fonction composée avec  $g = u$  et  $f : x \mapsto \sqrt{x}$ .

**Exemple :**  $f(x) = \sqrt{3x^2 + 5x + 7}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

$f(x) = \sqrt{u(x)}$  avec  $u(x) = 3x^2 + 5x + 7$  et  $u'(x) = 6x + 5$ .

Alors : 
$$f'(x) = \frac{6x + 5}{2\sqrt{3x^2 + 5x + 7}}$$

## II.3 Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$ , $n \in \mathbb{N}^*$

### Propriété

Soit  $u$  une fonction définie et dérivable sur un intervalle  $I$ . Soit  $u'$  sa fonction dérivée. et soit  $n$  un entier relatif non nul.

La fonction  $u^n$  est dérivable et  $(u^n)' = nu' \times u^{n-1}$ .

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec  $g = u$  et  $f(x) = x^n$ .

**Exemple :** Soit  $f : x \mapsto (3x^2 + 5x - 7)^5$ ;  $f = u^5$  avec  $u(x) = (3x^2 + 5x - 7)^5$ .

On a alors  $f' = (u^5)' = 5u^4 u' = 5u^4 u'$  avec  $u'(x) = 6x + 5$ .

Par conséquent :  $f'(x) = 5(6x + 5)(3x^2 + 5x - 7)^4$ .

## II.4 Dérivée de $\frac{1}{u}$

### Propriété

Soit  $u$  une fonction définie, non nulle et dérivable sur un intervalle  $I$ . Soit  $u'$  sa fonction dérivée. et soit  $n$  un entier relatif non nul.

La fonction  $\frac{1}{u^n}$  est dérivable et  $(\frac{1}{u^n})' = -n \times \frac{u'}{u^{n+1}}$ .

**Exemple :** Soit  $f : x \mapsto \frac{1}{(x^2 + x + 1)^5}$  sur  $\mathbb{R}$ .

On a  $f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^5}$  donc  $f = \frac{1}{u^n}$  avec  $\begin{cases} n = 5 \\ u(x) = x^2 + x + 1 \end{cases}$ .

$f' = -n \frac{u'}{u^{n+1}} = -5 \times \frac{u'}{u^6}$  avec  $u'(x) = 2x + 1$ .

Par conséquent :  $f'(x) = -\frac{5(2x + 1)}{(x^2 + x + 1)^6}$

## II.5 Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax + b)$

### Propriété

Soient  $f$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  et deux nombres  $a$  et  $b$ .

La fonction  $g : x \mapsto f(ax + b)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et a pour dérivée  $g'(x) = a \times f'(ax + b)$ .

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec  $g(x) = ax + b$ .

**Exemple :** Soit  $f : x \mapsto \cos(2x + 3)$ ;  $f'(x) = 2 \cos'(2x + 3) = -2 \sin(2x + 3)$ .

## II.6 Dérivée de $e^u$

### Propriété

On suppose  $u$  dérivable sur un intervalle  $I$ .  
Alors  $e^u$  est dérivable et  $(e^u)' = u'e^u$

**Exemple** Soit  $f(x) = e^{x^2 + \frac{1}{x}}$  définie sur  $\mathbb{R}^*$ .

$$f = e^u \text{ avec } u(x) = x^2 + \frac{1}{x}.$$

$$f' = u'e^u \text{ avec } u'(x) = 2x - \frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Alors : } f'(x) = \left(2x - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^2 + \frac{1}{x}} = \boxed{\left(\frac{x^3 - 1}{x^2}\right) e^{x^2 + \frac{1}{x}}}$$

## III Convexité d'une fonction

### III.1 Activité B page 1

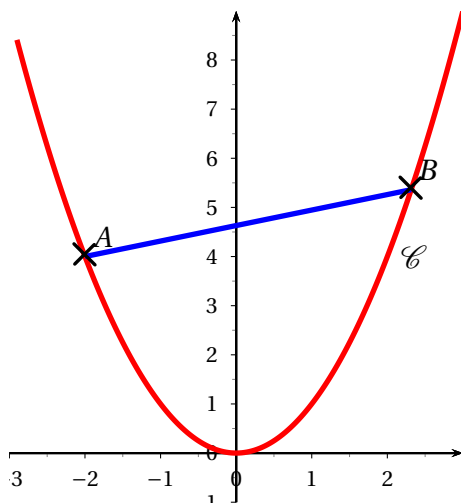
### III.2 Fonction convexe

### Définition

Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  et si la dérivée  $f'$  est elle-même dérivable, on note  $f''$  la dérivée de  $f'$ , donc  $f'' = (f')'$ .

### Définition

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.  
On dit que  $f$  est **convexe** sur  $I$  lorsque  $\mathcal{C}_f$  est en dessous de chacune de ses sécantes entre deux points d'intersection.



C'est le cas de la fonction carré, représentée ci-dessus.

## Propriété

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et deux fois dérivable.

Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

- $f$  est convexe sur  $I$ .
- La courbe représentative de  $f$  est entièrement située au-dessus de ses tangentes.
- $f'$  est croissante sur  $I$ .
- $f''$  est positive sur  $I$ .

**Démonstration partielle** : montrons que si  $f''$  est positive,  $\mathcal{C}$  est au-dessus de ses tangentes.

Soit  $a$  un réel de  $I$  ; l'équation de la tangente est  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

Soit  $g$  la fonction définie par  $g(x) = f(x) - [f'(a)(x - a) + f(a)]$  (différence des ordonnées d'un point de  $\mathcal{C}$  et d'un point de la tangente en  $a$  de même abscisse).

$g$  est deux fois dérivable comme différence de fonctions deux fois dérivables.

$g'(x) = f'(x) - f'(a)$  car la dérivée de la fonction affine  $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$  est  $f'(a)$ , coefficient directeur de la tangente.

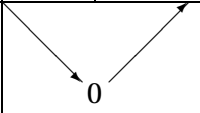
Alors  $g''(x) = f''(x)$ .

Par hypothèse,  $f''(x) \geq 0$  donc  $g''(x) \geq 0$ .

On en déduit que  $g'$  est croissante, avec  $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$ .

$g$  est donc décroissante pour  $x \leq a$  puis croissante pour  $x \geq a$ , avec  $g(a) = 0$ .

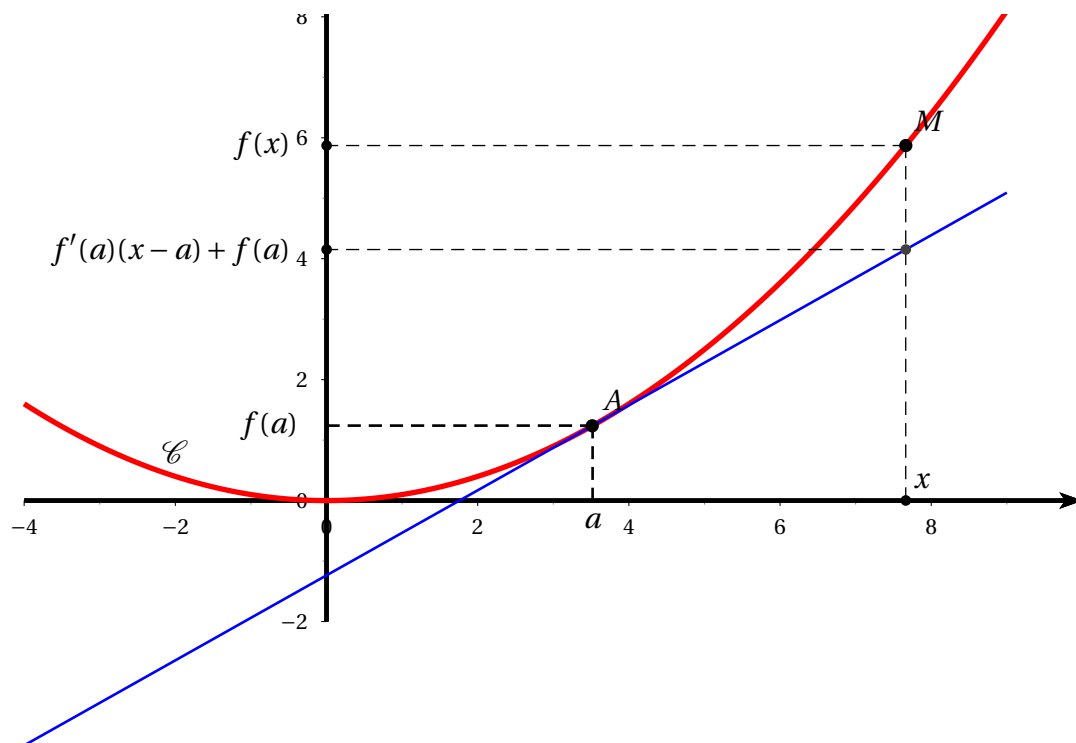
On en déduit le tableau de variation de  $g$  :

$x$	$a$
$g'(x)$	- 0 +
$g(x)$	

Le minimum de  $g$  est 0, donc  $g(x) \geq 0$  pour tout  $x \in I$ .

$\mathcal{C}$  est bien au-dessus de sa tangente.

## Illustration ci-dessous



**Remarque :**  $f$  est concave si  $f'$  est décroissante ou si  $f'' < 0$

### III.3 Point d'inflexion



#### Définition

Un point d'inflexion est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.  
La fonction change alors de convexité; elle passe de fonction convexe à concave ou réciproquement.



## Propriété

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur  $I$ .

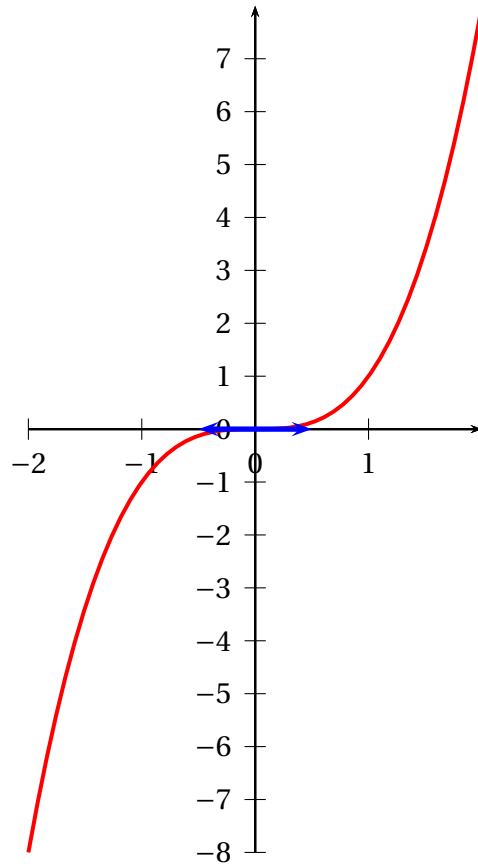
La courbe  $\mathcal{C}_f$  admet un point d'inflexion au point abscisse  $a$  si, et seulement si,  $f''$  s'annule en changeant de signe en  $a$ .

### III.4 Exemple 1

$$f(x) = x^3.$$

$$f'(x) = 3x^2 \text{ et } f''(x) = 6x \text{ qui change de signe en } 0.$$

$\mathcal{C}$  admet un point d'inflexion en 0. La courbe traverse sa tangente en O.



### III.5 Exemple 2

Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$ .

Soit  $\mathcal{C}_f$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

$f$  est deux fois dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f''(x) = 6x - 12 = 6(x - 2)$ .

$f''$  s'annule donc une seule fois en changeant de signe en  $x = 2$

Le point  $M$  de coordonnées  $(2; -9)$  est donc le seul point d'inflexion de la courbe, comme on peut le vérifier sur sa représentation graphique.

