Continuité d'une fonction

Table des matières

Activité A page 192

I Fonctions continues

I.1 Définition de la continuité :

Définition

Soit f est une fonction définie sur un intervalle I et soit a est un réel de I.
f est continue en a signifie que f admet une limite en a égale à $f(a)$.
f est continue sur l'intervalle I signifie que f est continue en chaque point a de I.

Exemples :

1. Soit f la fonction définie sur $I =]1; +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$.
   La fonction f est continue en 2 car : $f(2) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 1$.
   Plus généralement, cette fonction est continue sur I.

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x < 0 \\ e^x \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$.

   f est continue en 0, car :

   - $f(0) = e^0 = 1$.
   - $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} 1 = 1 = f(0)$.
   - $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} e^x = 1 = f(0)$.
     On en déduit que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0)$.

I.2 Illustration graphique :

De manière intuitive, on reconnaît graphiquement qu'une fonction est continue lorsque sa courbe peut être tracée sans lever le crayon. (attention, cela ne constitue pas une preuve!)

Exemple : la fonction carré est continue :
En effet, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to a} x^2 = a^2$; on peut donc tracer la parabole sans lever le crayon.

Existe-t-il des fonctions non continues? Oui, il suffit de tracer une courbe avec une rupture dans le tracé; la fonction associée n'est alors pas continue.

I.3 Exemple d'une fonction explicite non continue : la fonction « Partie entière »

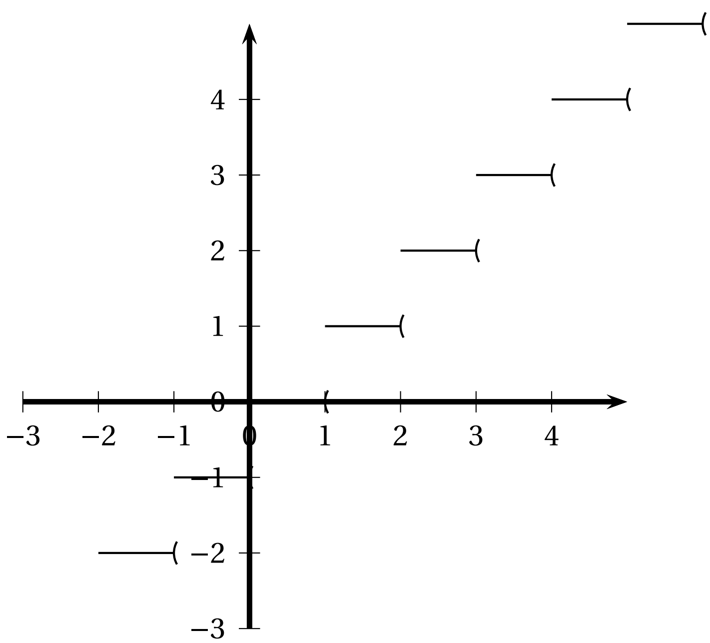
Définition

Soit x un réel. Il existe alors un entier relatif n unique tel que : $n \leq x < n+1$. On définit alors la fonction partie entière, notée E, par : $E(x) = n$.

Exemples : $E(2,3) = 2$; $E(3) = 3$; $E(-4,12) = -5$ (**attention aux nombres négatifs**).

Remarque : Cette fonction est constante sur chaque intervalle de la forme $[n; n+1[$.

Représentation graphique :



Sur $[n\ ;\ n+1[$, $E(x) = x$.
$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x > n}} E(x) = n$ puisque $E(x) = n$ sur $[n\ ;\ n+1[$

$\lim\limits_{\substack{x \to n \\ x<n}} E(x) = n-1$ puisque $E(x) = n-1$ sur $[n-1\,;\,n[$
$E(n) = n$.
On n'a donc pas $\lim\limits_{x \to n} E(x) = E(n)$: E n'est pas continue en n pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

En fait, E est continue **à droite**, mais pas à gauche.

Exemple de fonction discontinue partout (hors-programme!)

La fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ f((x) = 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est discontinue en tout réel a de $\mathbb{R}$.
Cela vient de la structure des réels. Pour chaque nombre rationnel (pouvant d'écrire comme quotient d'entiers), on peut toujours trouver un irrationnel aussi proche que l'on veut de ce rationnel et on peut approcher aussi près que l'on veut un irrationnel par un rationnel

II Continuité des fonctions usuelles :

Théorème

Les fonctions polynômes, la fonction sinus, la fonction cosinus sont continues sur $\mathbb{R}$. La fonction racine carrée est continue sur $[0;+\infty[$.
La somme, le produit, le quotient et la composée de deux fonctions continues est une fonction continue sur leur ensemble de définition.

Démonstration : Cela vient des propriétés sur les calculs de limites (voir chapitre sur les limites)

Exercice : f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xsix \leq 0$, $f(x) = x^2$ si $0 < x < 1$, $f(x) = m$ si $x \geq 1$.

1. $m = 2$. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?
2. Pour quelle valeur de m la fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

Théorème

Toute fonction dérivable sur un. intervalle I est continue sur cet intervalle.

Démonstration : Soit f une fonction dérivable sur I.
Soient x et a deux réels de I.
Pour tout $x \neq a$, $f(x) - f(a) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} \times (x-a)$.
$\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(a)$ et $\lim\limits_{x \to a} (x-a) = 0$.
Par produit : $\lim\limits_{x \to a} \big(f(x) - f(a)\big) = f'(a) \times 0 = 0$ donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

III Le théorème des valeurs intermédiaires :

III.1 Activité B page 192

III.2 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème des valeurs intermédiaires (admis)

f est une fonction **continue** définie sur un intervalle I.
Soient a et b deux réels de I.
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.

Remarque : la démonstration est proposée à l'exercice n° 96 page 209

Remarque : c'est un **théorème d'existence**; il ne donne pas la valeur d'un solution. D'ailleurs, la plupart du temps, on se sert de ce théorème pour montrer l'existence d'une solution qu'on ne sait pas trouver de façon explicite.

Interprétation graphique :

Si $(\mathscr{C})$ est la courbe représentative de f continue sur $[a; b]$, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, la droite d'équation $y = k$ coupe au moins une fois la courbe $(\mathscr{C})$ en un point d'abscisse c comprise entre a et b.

Interprétation en terme d'équation :
f est une fonction continue sur un intervalle I comprenant a et b. Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet **au moins** une solution c comprise entre a et b.

III.3 Cas des fonctions continues strictement monotones :

Théorème

Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $[a; b]$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique.

Démonstration :
L'existence d'une solution vient du théorème des valeurs intermédiaires.
L'unicité vient de la stricte monotonie.

Remarque : Tableaux de variations :
Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variation traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

IV Exercices d'application

IV.1 Exercice 1

Démontrer que l'équation $x^3 + 4x^2 + 4x + 2 = 0$ admet au moins une solution comprise entre -3 et -2.

Solution

On pose $f(x) = x^3 + 4x^2 + 4x + 2$.
$f'(x) = 3x^2 + 8x + 4$; $\Delta = 64 - 48 = 16 > 0$.
$f'(x)$ a deux racines : $x_1 = -2$ et $x_2 = -\dfrac{2}{3}$.
$f'(x) > 0$ à l'extérieur de ses racines (trinôme du second degré)
$f(-2) = -2$ et $f\left(-\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{22}{27}$
Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3\left(x + \dfrac{4}{x} + \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{2}{x^3}\right)$ d'où :
$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
Tableau de variation :

x	$-\infty$		-2		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$\frac{22}{7}$	↗	$+\infty$

Sur $]-\infty\,;\,-2]$:

- f est continue
- $f(-3) = -1 < 0$
- $f(-2) = 2 > 0$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation. $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]-3\,;\,-2]$.
Comme f est croissante sur cet intervalle, cette solution est unique ; on la note α.
Sur $[-2\,;\,+\infty[$, $f(x) > 0$ donc cette équation n'a pas de solution.
On détermine α à la calculatrice : on trouve $\alpha \approx -2,84$

Exercice 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. a et b sont des réels de I tels que $f(a)f(b) < 0$. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

Solution : puisque $f(a)f(b) < 0$, $f(a)$ et $f(b)$ ont des signes contraires ; f est continue.
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution comprise entre a et b.

Exercice 3

Montrer qu'un polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

Solution

$f(x) = ax^3 + bx^+ cx + d$.

Pour $x \neq 0$, $f(x) = x^3 \left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{d}{x^3}\right)$.

$\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left(a + \dfrac{b}{x} + \dfrac{c}{x^2} + \dfrac{d}{x^3}\right) = a$

$\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to =\infty} x^3 = +\infty$.

On en déduit que si $a > 0$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Si $a < 0$, c'est le contraire.

Comme f est continue et que f change de signe, $f(x)$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Un randonneur parcourt 10 km en deux heures exactement. Montrer qu'il y a un intervalle de temps de durée une heure exactement durant lequel il parcourt exactement 5 km.

On note $d(t)$ le temps parcouru au bout de t heures ($0 \leqslant t \leqslant 2$) et on considère la fonction $u : t \mapsto d(t+1) - d(t)$.

Solution :

$u(0) = d(1)$ et $u(1) = d(2) - d(1)$.

- Si $u(1) = 5$, l'intervalle $[0~;~1]$ convient.
- Si $u(1) < 5$, alors $u(0) > 5$ et $u(1) < 5$; comme u est continue, l'équation $u(t) = 5$ a une solution.
- Si $u(1) > 5$, alors $u(0) < 5$ et $u(1) > 5$; comme u est continue, l'équation $u(t) = 5$ a une solution.

IV.2 Approximation des solutions d'une équation du type $f(x) = k$

- méthode du balayage (tableau de valeurs avec un pas de plus en plus petit)
- dichotomie : on coupe l'intervalle en deux à chaque étape.
  On peut consulter la vidéo suivante : cliquer ici
- utilisation de la fonction Solve de la calculatrice

V Suites définies par récurrence à l'aide d'une fonction continue

Théorème

Soit (u_n) une suite définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers ℓ et si f est continue, alors $f(\ell) = \ell$, donc ℓ est **une** solution de l'équation $f(x) = x$.

Démonstration :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = \ell$.
- Comme f est continue, puisque $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$.
- La limite d'une suite est unique, donc $\ell = f(\ell)$.

Exemple : Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} \end{cases}$.

1. Montrer que la suite est décroissante.
2. montrer qu'elle est minorée.
3. En déduire qu'elle est convergente.
4. Quelle est sa limite ?

Solution

1. Montrons par récurrence que $u_n + 1 < u_n$ pour tout n.
   - $u_1 = \sqrt{1+u_0} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2 < u_1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
   - On suppose la propriété vraie pour un tang n quelconque, donc $u_{n+1} < u_n$. (hypoth-èse de récurrence)
     Alors : $u_{n+1} < u_n \Rightarrow u_{n+1} + 1 < u_n + 1 \Rightarrow \sqrt{u_{n+1}+1} < \sqrt{u_n} + 1$ (croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$) donc $u_{n+2} < u_{n+1}$. La propriété est héréditaire.
     Elle est donc vraie pour tout n : la suite est décroissante.
   - pour tout n, $u_n > 0$ (se démontrerait de façon évidente par récurrence) et on a même $u_n > 1$.
   - (u_n) est décroissante minorée donc convergente (théorème de la convergence monotone)
   - (u_n) est définie par récurrence sous la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = \sqrt{1+x}$.
     La limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ donc $\sqrt{1+x} = x$.
     $x = \sqrt{1+x} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 = 1+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geqslant 0 \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{cases}$.
     La solution positive de cette équation est $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
     On en déduit : $\boxed{\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}$ (nombre d'or).