Compléments sur la dérivation

Table des matières

I Composée de deux fonctions

I.1 Exemple :

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

Si on veut calculer $f(3)$, on commence par calculer 3^2 **puis** $\dfrac{1}{3^2}$.

Schématiquement : $f : x \mapsto x^2 \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

On applique donc d'abord la fonction carré, puis la fonction inverse. On dit qu'on a commencé la fonction carré par la fonction inverse.

I.2 Notations

Notons u la fonction carré : $u(x) = x^2$ et v la fonction inverse : $v(x) = \dfrac{1}{x}$.

Schématiquement : $f : x \xrightarrow[x]{u} y = x^2 \xrightarrow{v} \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{x^2}$.

On note : $f = v \circ u$, composée de u par v.

Donc : $v \circ u(x) = v(u(x))$.

⚠ : on commence par la fonction écrite la plus à droite.

I.3 Exercice

Écrire les fonctions suivantes comme composée de deux fonctions :

a $f(x) = \left(x^{+}3x+5\right)^2$

b $g(x) = \mathrm{e}^{x^{+3}}$

c $h(x) = \sqrt{x^2+1}$

II Dérivée de la composée de quelques fonctions :

II.1 Dérivée de $f \circ g$

Théorème admis

Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans J et f une fonction définie et dérivable sur J.
Alors $f \circ g$ est dérivable et $\left(f \circ g\right)' = g' \times \left(f' \circ g\right)$.
Pour tout $x \in I$, $\left(f \circ g\right)'(x) = g'(x) \times f'(g(x))$.

Démonstration : Soit x_0 un réel de l'intervalle I.
On doit montrer que $\dfrac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0}$ admet une liste finie quand x tend vers x_0.
Or : $\dfrac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{x - x_0} = \dfrac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \times \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}$.
g est dérivable en x_0 donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0)$..
g est continue en x_0, donc $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = g(x_0)$.
f est dérivable en $f(x_0)$ donc $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f \circ g(x) - f \circ g(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = f'\left(g(x_0)\right) = f' \circ g(x_0)$.
On en déduit que : $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$

II.2 Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Propriété

Soit u une fonction définie, positive et dérivable sur un intervalle I., de fonction dérivée u'.
La fonction f définie sur I par $f : x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable en tout nombre x tel que $u(x) \neq 0$ et
$f'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

On applique la formule de dérivations d'une fonction composée avec $g = u$ et $f : x \mapsto \sqrt{x}$.
Exemple : $f(x) = \sqrt{3x^2+5x+7}$ définie sur $\mathbb{R}$.
$f(x) = \sqrt{u(x)}$ avec $u(x) = 3x^2+5x+7$ et $u'(x) = 6x+5$.
Alors : $\boxed{f'(x) = \dfrac{6x+5}{2\sqrt{3x^2+5x+7}}}$.

II.3 Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$, $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Soit u' sa fonction dérivée. et soit n un entier relatif non nul.
La fonction u^n est dérivable et $\left(u^n\right)' = nu' \times u^{n-1}$.

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec $g = u$ et $f(x) = x^n$.
Exemple : Soit $f : x \mapsto \left(3x^2+5x-7\right)^5$; $f = u^5$ avec $u(x) = \left(3x^2+5x-7\right)^5$.
On a alors $f' = \left(u^7\right)' = 7u'u^{7-1} = 7u'u^6$ avec $u'(x) = 6x+5$.
Par conséquent : $\boxed{f'(x) = 7(6x+5)\left(3x^2+5x-7\right)^6}$.

II.4 Dérivée de $\dfrac{1}{u}$

Propriété

Soit u une fonction définie, non nulle et dérivable sur un intervalle I. Soit u' sa fonction dérivée. et soit n un entier relatif non nul.
La fonction $\dfrac{1}{u^n}$ est dérivable et $\left(u^n\right)' = -n \times \dfrac{u'}{u^{n+1}}$.

Exemple : Soit $f : x \mapsto \dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)^5}$ sur $\mathbb{R}$.

On a $f(x) = \dfrac{1}{\left(x^2+x+1\right)^5}$ donc $f = \dfrac{1}{u^n}$ avec $\begin{cases} n = 5 \\ u(x) = x^2+x+1 \end{cases}$.

$f' = -n\dfrac{u'}{u^{n+1}} = -5 \times \dfrac{u'}{u^6}$ avec $u'(x) = 2x+1$.

Par conséquent : $f'(x) = -\dfrac{5(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^6}$

II.5 Dérivée de la fonction $x \mapsto f(ax+b)$

Propriété

Soient f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et deux nombres a et b.
La fonction $g : x \mapsto f(ax+b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $g' x \mapsto a \times f'(ax+b)$.

On applique la formule de dérivation d'une fonction composée avec $g(x) = ax+b$.
Exemple : Soit $f : x \mapsto \cos(2x+3)$; $f'(x) = 2\cos'(2x+3) = \boxed{-2\sin(2x+3)}$.

II.6 Dérivée de e^u

Propriété

On suppose u dérivable sur jun intervalle I.
Alors e^u est dérivable et $\left(\mathrm{e}^u\right)' = u'\mathrm{e}^u$

Exemple Soit $f(x) = \mathrm{e}^{x^2+\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$.

$f = \mathrm{e}^u$ avec $u(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$.

$f' = u'\mathrm{e}^u$ avec $u'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2}$.

Alors : $f'(x) = \left(2x - \dfrac{1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x^2+\frac{1}{x}} = \boxed{\left(\dfrac{x^3-1}{x^2}\right)\mathrm{e}^{x^2+\frac{1}{x}}}$

III Convexité d'une fonction

III.1 Activité B page 1

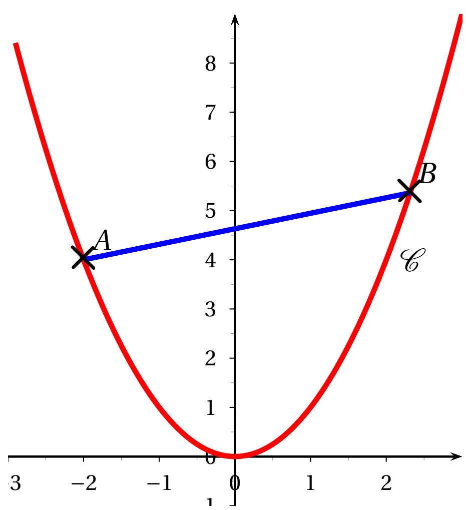
III.2 Fonction convexe

Définition

Si f est dérivable sur un intervalle I et si la dérivée f' est elle-même dérivable, on note f'' la dérivée de f', donc $f'' = \left(f'\right)'$.

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
On dit que f est **convexe** sur I lorsque $\mathscr{C}_f$ est en dessous de chacune de ses sécantes entre deux points d'intersection.



C'est le cas de la fonction carré, représentée ci-dessus.

Propriété

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et deux fois dérivable.
Les quatre propriétés suivantes sont équivalentes :

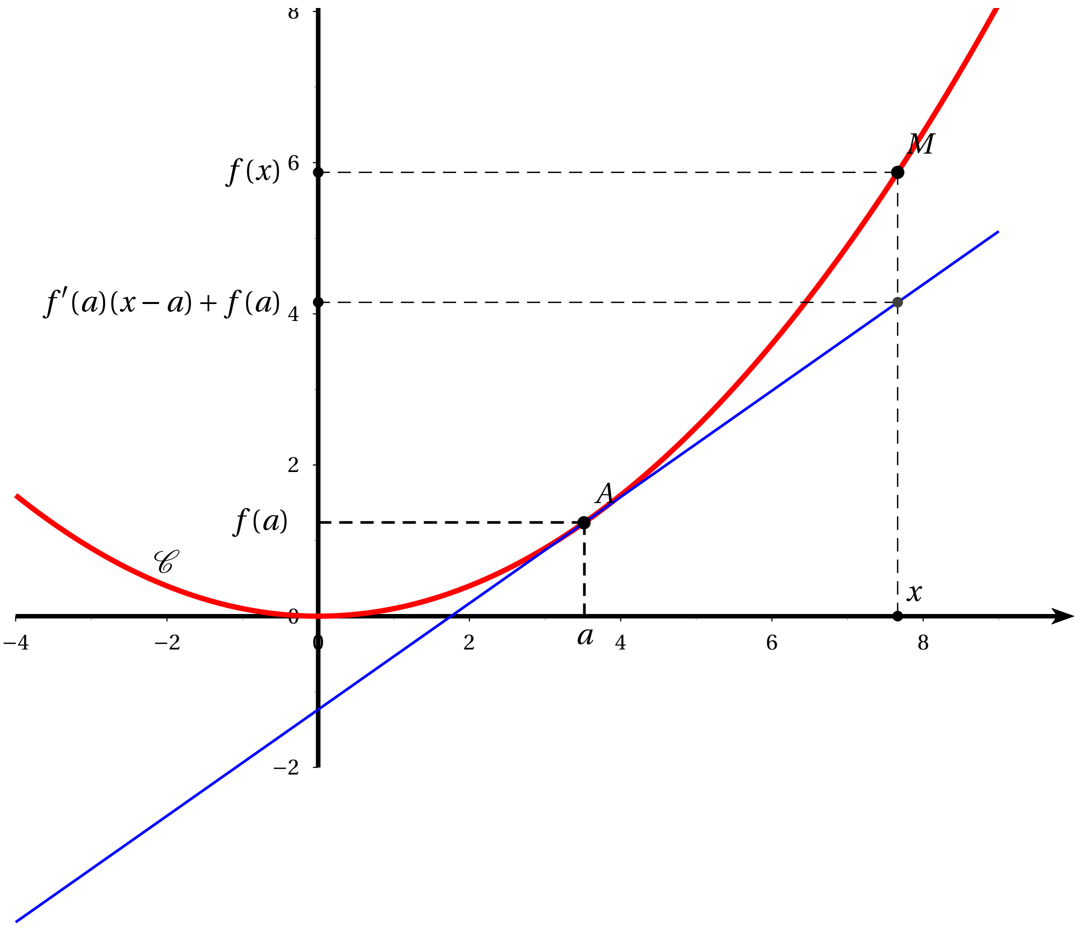
- f est convexe sur I.
- La courbe représentative de f est entièrement située au-dessus de ses tangentes.
- f' est croissante sur I.
- f'' est positive sur I

Démonstration partielle : montrons que si f'' est positive, $\mathscr{C}$ est au-dessus de ses tangentes.
Soit a un réel de I ; l'équation de la tangente est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Soit g la fonction définie par $g(x) = f(x) - \left[f'(a)(x-a) + f(a)\right]$ (différence des ordonnées d'un point de $\mathscr{C}$ et d'un point de la tangente en a de même abscisse).
g est deux fois dérivable comme différence de fonctions deux fois dérivables.
$g'(x) = f'(x) - f'(a)$ car la dérivée de la fonction affine $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ est $f'(a)$, coefficient directeur de la tangente.
Alors $= g''(x) = f''(x)$.
Par hypothèse, $f''(x) \geqslant 0$ donc $g''(x) \geqslant 0$.
On en déduit que g' est croissante, avec $g'(a) = f'(a) - f'(a) = 0$.
g est donc décroissante pour $x \leqslant a$ puis croissante pour $x \geqslant a$, avec $g(a) = 0$.
On en déduit le tableau de variation de g :

x		a	
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

Le minimum de g est 0, donc $g(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in I$.

$\mathscr{C}$ est bien au-dessus de sa tangente.
Illustration ci-dessous



Remarque : f est concave si f' est décroissante ou si $f'' < 0$

III.3 Point d'inflexion

Définition

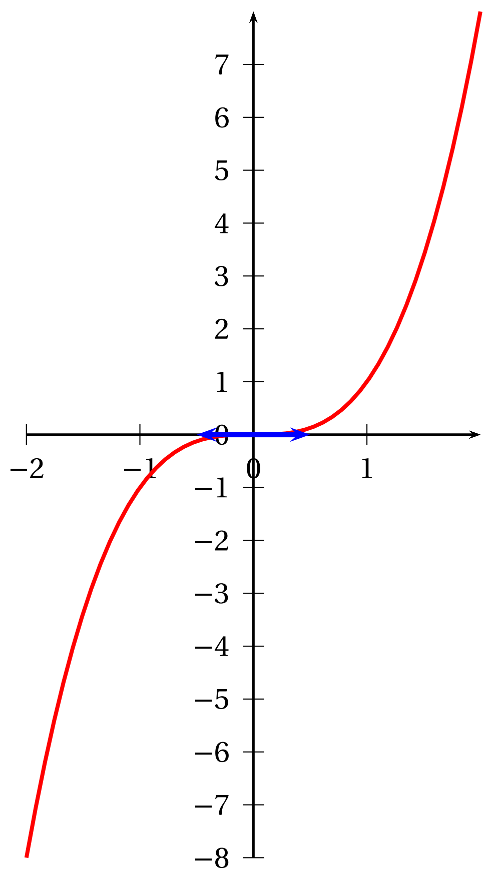
Un point d'inflexion est un point où la courbe représentative d'une fonction traverse sa tangente.
La fonction change alors de convexité ; elle passe de fonction convexe à concave oui réciproquement.

Propriété

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.
La courbe $\mathscr{C}_f$ admet un point d'inflexion au point abscisse a si, et seulement si, f'' s'annule en changeant de signe en a.

III.4 Exemple 1

$f(x) = x^3$.
$f'(x) = 3x^2$ et $f''(x) = 6x$ qui change de signe en 0.
$\mathscr{C}$ admet un point d'inflexion en 0. La courbe traverse sa tangente en O.



III.5 Exemple 2

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 6x^2 + 3x + 1$.
Soit $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.
f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$.
f'' s'annule donc une seule fois en changeant de signe en $x = 2$
Le point M de coordonnées (2 ; -9)est donc le seul point d'inflexion de la courbe, comme on peut le vérifier sur sa représentation graphique.