Spécialité Terminale : contrôle (fonctions, suites)

I

Étudier les variations des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$ sur $\mathbb{R}$

b) $h(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.

II

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}$.

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
   On précisera les extrema locaux.

III

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que : $u_0 = 3$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_{15} = 768$.
Calculer la raison de cette suite.

IV

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2.$$

1. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12$.
   (a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n.
   (c) En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 12 - 2 \times 0,9^n$.
2. Déterminer la limite de la suite (v_n) et en déduire celle de la suite (u_n).

V

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. (a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}} \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2\sqrt{n}}$.
   (b) Quelle est la limite de (u_n) ?
2. La suite (v_n) est définie par $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{\sqrt{n}}$.
   Quelle est la limite de (v_n) ?

VI

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. Quelles formules ont été entrées dans les cellules B3 et C3 pour obtenir par copie vers le bas les termes des deux suites ?
2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	l3	24 587	8 192

Conjecturer les limites des suites (u_n) et $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a
$u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.
2. Déterminer la limite de la suite (u_n).
3. Déterminer le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrer que la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.
2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \dfrac{n}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Déterminer la limite de la suite $\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right)$.