Spécialité Terminale : correction du contrôle (fonctions, suites)

I

Étudier les variations des fonctions suivantes :

a) $f(x) = x^3 + x^2 - 5x$ sur $\mathbb{R}$.
$f'(x) = 3^2 + 2x - 5$.
$\Delta = 64 > 0$; ce trinôme a deux racines : $x_1 = -\dfrac{5}{3}$ et $x_2 = 1$.
Il est du signe de 3, donc positif, à l'extérieur des racines.
On en déduit le tableau de variation :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	-2	$\nearrow$	

b) $h(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$ sur $\mathbb{R}^*$.
$h'(x) = 2x - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{2x^3 - 1}{x^2}$.
$2x^3 - 1$ s'annule pour $x^3 = \dfrac{1}{2}$, donc pour $x = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$
La fonction $\mapsto x^3$ est croissante donc $h'(x) < 0$ pour $x < \sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$.

x	$-\infty$		0		$\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	‖		0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	‖	$\searrow$	$\approx 1,89$	$\nearrow$	$+\infty$

II

Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x^2 - 12x + 27}{x^2 - 4x + 5}$.

1. Le dénominateur est un polyynôme du second degré; $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 5 = 16 - 20 = -4 < 0$.
   On en déduit que ce polynôme ne s'annule pas, donc l'ensemble de définition de $f(x)$ est $\mathbb{R}$.
   $\boxed{\mathscr{D} = \mathbb{R}}$.
2. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables. $f = \dfrac{u}{v}$ avec $\begin{cases} u(x) = x^2 - 12x + 27 \\ v(x) = x^2 - 4x + 5 \end{cases}$.
   $f' = \left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ avec $\begin{cases} u'(x) = 22x - 12 \\ v'(x) = 2x - 4 \end{cases}$.
   On en déduit que :
   $f'(x) == \dfrac{(2x-12)\left(x^2 - 4x + 5\right) - (22x - 4)\left(x^2 - 12x + 27\right)}{\left(x^2 - 4x + 5\right)^2}$
   $= \dfrac{\left[2x^3 - 20x^2 + 58x - 60\right] - \left[2x^3 - 28x^2 + 102x - 108\right]}{\left(x^2 - 4x + 5\right)^2}$
   $= \dfrac{8x^2 - 44x + 48}{\left(x^2 - 4x + 5\right)^2}$
   $= \boxed{4 \times \dfrac{2x^2 - 11x + 12}{\left(x^2 - 4x + 5\right)^2}}$.
   Le dénominateur est positif (carré d'un réel) et 4 est positif donc $f'(x)$ est du signe de $2x^2 - 11x + 12$.
   Le discriminant est
   $\Delta = (-11)^{-}4 \times 2 \times 12 = 121 - 96 = 25 > 0$.
   Le numérateur de $f'(x)$ a deux racines :
   $x_1 = \dfrac{11 - 5}{4} = \dfrac{3}{2}$ et $x_2 = \dfrac{11 + 5}{4} = 4$.
   Il est du signe du coefficient de x^2, 1, donc positif, à l'extérieur de l'intervalle formé par les racines et négatif entre les racines.

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		4		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	9	$\searrow$	-1	$\nearrow$	

III

Soit (u_n) une suite arithmétique telle que :
$u_0 = 3$ et $u_0 + u_1 + \cdots + u_{15} = 768$.
D'après le cours, $u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \boxed{(n+1) \times \dfrac{u_0 + u_n}{2}}$
donc :
$u_0 + u_1 + \cdots + u_{15} = 16 \times \dfrac{(u_0 + u_{15})}{2} = 8\,(u_0 + u_{15})$.
Or $u_{15} = u_0 + 15r$ donc $8\,(u_0 + u_{15}) = 8\,(u_0 + u_0 + 15r) = 8\,(2u_0 + 15r)$.
Cette somme vaut 768 donc $8\,(2u_0 + 15r) = 768$ d'où $2u_0 + 15r = \dfrac{768}{8} = 96$, soit $2 \times 3 + 15r = 96$.
On en déduit : $15r = 96 - 6 = 90$ d'où $r = \dfrac{90}{15} = 6$.
La raison de cette suite est $\boxed{r = 6}$.

IV

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = 0,9u_n + 1,2.$$

1. (a) Pour tout n :
   $v_{n+1} = u_{n+1} - 12 = 0,9u_n + 1,2 - 12 = 0,9u_n - 10,8 = 0,9(u_n - 12) = \boxed{0,9v_n}$
   La suite (v_n) est donc **géométrique** de raison 0,9 et de premier terme
   $v_0 = u_0 - 12 = -2$

   (b) En appliquant les formules sur les suites géométriques, on a :
   $v_n = v_0 \times q^n = \boxed{-2 \times 0,9^n}$

   (c) On a $v_n = u_n - 12$. soit $u_n = v_n + 12$ et donc pour tout n, $\boxed{u_n = 12 - 2 \times 0,9^n}$.

2. Comme la raison de la suite (v_n) est comprise entre 0 et 1, la limite de la suite (v_n) est donc nulle.
   Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n + 12 = \boxed{12}$.

V

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}^*$ par :
$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

1. (a) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
   $= \dfrac{\left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right]\left[\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right]}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$
   $= \dfrac{(n+1) - n}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}} = \boxed{\dfrac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}}$,
   car $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.
   Pour tout n, $n < n+1$ donc $\sqrt{n} < \sqrt{n+1}$ (croissance de la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$).
   On en déduit :
   $\sqrt{n} + \sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1} + \sqrt{n+1}$,
   c'est-à-dire $2\sqrt{n} < \sqrt{n} + \sqrt{n+1} < \sqrt{n+1}$.
   En appliquant la fonction inverse qui est décroissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on en déduit :

   $$\boxed{\frac{1}{2\sqrt{n+1}} < u_n < \frac{1}{2\sqrt{n}}}$$

   (b) $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n+1}}\right) = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{2\sqrt{n}}\right) = 0$, donc, d'après e théorème des gendarmes, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

2. La suite (v_n) est définie par
   $v_n = \dfrac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{\sqrt{n}}$.
   Pour tout n, $u_1 + u_+ \cdots + u_n$
   $= \left[\sqrt{2} - \sqrt{1}\right] + \left[\sqrt{3} - \sqrt{2}\right] + \cdots$
   $+ \left[\sqrt{n} - \sqrt{n-1}\right] + \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = \sqrt{n+1} - 1$,
   après simplification.
   On en déduit que, pour tout $n > 0$,
   $\boxed{v_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - 1}{\sqrt{n}}}$.
   On a $v_n = \dfrac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}} = \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} - \dfrac{1}{\sqrt{n}}$
   $\sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = \sqrt{\dfrac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)}{n}} = \sqrt{1 + \dfrac{1}{n}}$ donc
   $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n}} = 1$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = 1$.
   $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right) = 0$.
   On en déduit : $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 1}$

VI

On considère deux suites (u_n) et (v_n) :

- la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$;
- la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = 2^n$.

Partie A : Conjectures

Florent a calculé les premiers termes de ces deux suites à l'aide d'un tableur.
Une copie d'écran est donnée ci-dessous.

	A	B	C
1	rang n	terme u_n	terme v_n
2	0	1	1
3	1	5	2
4	2	12	4
5	3	25	8
6	4	50	16

1. en B3, on tape : « $= 2B2 - A2 + 3$ »
   en C3, on tape : « $= 2 \wedge (A3)$ » ou « $= 2 \times C2$ »
   Rappel : une formule de tableur commence toujours par =.

2. Pour les termes de rang 10, 11, 12 et 13 Florent obtient les résultats suivants :

12	10	3 080	1 024
13	11	6 153	2 048
14	12	12 298	4 096
15	l3	24 587	8 192

La limite de (u_n) semble être $+\infty$

Celle de $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ **semble être égale à 3**.

Partie B : Étude de la suite (u_n)

1. Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = 3 \times 2^n + n - 2.$$

- **Initialisation** : $u_0 = 1$ et $3 \times 2^0 + 0 - 2 = 1$ donc l'égalité est vérifiée au rang 0.
- **Hérédité** : Soit n un naturel quelconque et supposons que : $u_n = 3 \times 2^n + n - 2$

  D'après la définition :

  $u_{n+1} = 2u_n - n + 3$

  $= 2\left(3 \times 2^n + n - 2\right) - n + 3 = 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3$

  $= 3 \times 2^{n+1} + n - 1$ soit

  $u_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + n + 1 - 1 - 1 = \boxed{3 \times 2^{n+1} + (n+1) - 2}$.

  La relation est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : la relation est vraie au rang 0, et si elle est vraie au rang n, elle est vraie au rang $n+1$. D'après le principe de la récurrence on a donc démontré que pour tout naturel n,

$u_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

2. Déterminons la limite de la suite (u_n).

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$ donc par somme,

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty}.$$

3. Déterminons le rang du premier terme de la suite supérieur à 1 million.

$u_{18} = 786\,448 < 1\,000\,000$ et

$u_{19} = 1\,572\,881 > 1\,000\,000$.

19 est donc le rang du premier terme supérieur à un million.

Partie C : Étude de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$

1. Démontrons que la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est décroissante à partir du rang 3.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n-2}{2^n}$

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n}$

$= \left(3 + \frac{n-1}{2^{n+1}}\right) - \left(3 + \frac{n-2}{2^n}\right)$

$= \frac{n - 1 - 2(n-2)}{2^{n+1}} = \boxed{\frac{-n+3}{2^{n+1}}}$

qui est du signe de $-n+3$

Donc $\frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} - \frac{u_n}{v_n} < 0$ si $n > 3$ alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ est **décroissante** à partir du rang 3

2. On admet que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4, on a : $0 < \frac{n}{2^n} \leqslant \frac{1}{n}$.

Déterminons la limite de la suite $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_n}{v_n} = 3 + \frac{n-2}{2^n} = 3 + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^{n-1}}$

d'après l'encadrement donné, on en déduit que pour $n \geqslant 4$, $3 - \frac{1}{2^{n-1}} < \frac{u_n}{v_n} \leqslant 3 + \frac{1}{n} - \frac{1}{2^{n-1}}$

Or $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$ alors d'après le théorème des gendarmes on a : $\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3}$.