Spécialité mathématiques : DM4

« Arithmétique, algèbre, géométrie, trinité grandiose ! Triangle lumineux ! Celui qui ne vous a pas connues est un insensé ! Il mériterait l'épreuve des plus grands supplices. », d'après le Comte de Lautréamont (1846 - 1870))

Exercice I

Dans cet exercice, on munit le plan d'un repère orthonormé.

On a représenté ci-dessous la courbe d'équation :

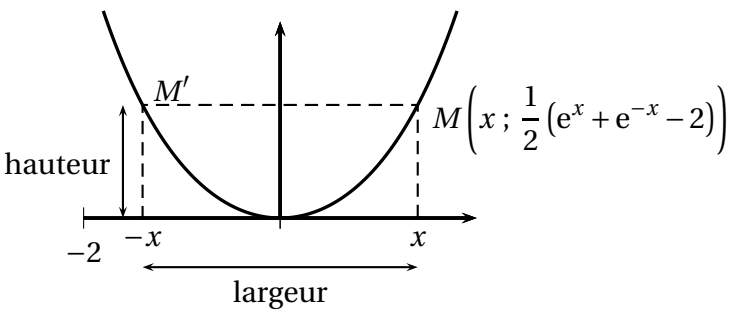
$$y = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 2\right).$$

Cette courbe est appelée une « chaînette ».

On s'intéresse ici aux « arcs de chaînette »délimités par deux points de cette courbe symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

Un tel arc est représenté sur le graphique ci-dessous en trait plein.

On définit la « largeur »et la « hauteur »de l'arc de chaînette délimité par les points M et M' comme indiqué sur le graphique.



Le but de l'exercice est d'étudier les positions possibles sur la courbe du point M d'abscisse x strictement positive afin que la largeur de l'arc de chaînette soit égale à sa hauteur.

1. Justifier que le problème étudié se ramène à la recherche des solutions strictement positives de l'équation

$$(E) : \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2 = 0.$$

2. On note f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{x} + \mathrm{e}^{-x} - 4x - 2.$$

   (a) Vérifier que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = x\left(\frac{\mathrm{e}^{x}}{x} - 4\right) + \mathrm{e}^{-x} - 2$$

.

   (b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. (a) On note f' la fonction dérivée de la fonction f. Calculer $f'(x)$, où x appartient à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

   (b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ équivaut à l'équation : $\left(\mathrm{e}^{x}\right)^{2} - 4\mathrm{e}^{x} - 1 = 0$.

   (c) En posant $X = \mathrm{e}^{x}$, montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet pour unique solution réelle le nombre $\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$.

4. On donne ci-dessous le tableau de signes de la fonction dérivée f' de f :

x	0		$\ln\left(2+\sqrt{5}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

   (a) Dresser le tableau de variations de la fonction f.

   (b) Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive que l'on notera α.

5. On considère l'algorithme suivant où les variables a, b et m sont des nombres réels :

```
Tant que b − a > 0,1 faire :
    m ← (a + b)/2
    Si e^m + e^(−m) − 4m − 2 > 0, alors :
        b ← m
    Sinon :
        a ← m
    Fin Si
Fin Tant que
```

   (a) Avant l'exécution de cet algorithme, les variables a et b contiennent respectivement les valeurs 2 et 3.

   Que contiennent-elles à la fin de l'exécution de l'algorithme ?

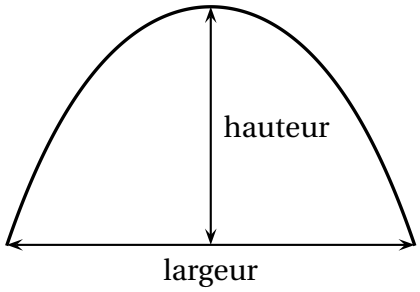
   On justifiera la réponse en reproduisant et en complétant le tableau ci-contre avec les différentes valeurs prises par les variables, à chaque étape de l'algorithme.

(b) Comment peut-on utiliser les valeurs obtenues en fin d'algorithme à la question précédente ?

m	a	b	$b-a$
	2	3	1
2,5			
...	...	...	

6. La Gateway Arch, édifiée dans la ville de Saint-Louis aux États-Unis, a l'allure ci-dessous.

   Son profil peut être approché par un arc de chaînette renversé dont la largeur est égale à la hauteur.



   La largeur de cet arc, exprimée en mètre, est égale au double de la solution strictement positive de l'équation :

$$(E') : \mathrm{e}^{\frac{t}{39}} + \mathrm{e}^{-\frac{t}{39}} - 4\frac{t}{39} - 2 = 0.$$

   Donner un encadrement de la hauteur de la Gateway Arch.

Exercice II

Pour préparer l'examen du permis de conduire, on distingue deux types de formation :

— la formation avec *conduite accompagnée*;

— la formation *traditionnelle*.

On considère un groupe de 300 personnes venant de réussir l'examen du permis de conduire. Dans ce groupe :

— 75 personnes ont suivi une formation avec *conduite accompagnée*; parmi elles, 50 ont réussi l'examen à leur première présentation et les autres ont réussi à leur deuxième présentation.

— 225 personnes se sont présentées à l'examen suite à une formation *traditionnelle*; parmi elles, 100 ont réussi l'examen à la première présentation, 75 à la deuxième et 50 à la troisième présentation.

On interroge au hasard une personne du groupe considéré.

On considère les évènements suivants :

A : « la personne a suivi une formation avec *conduite accompagnée* »;

R_1 : « la personne a réussi l'examen à la première présentation »;

R_2 : « la personne a réussi l'examen à la deuxième présentation »;

R_3 : « la personne a réussi l'examen à la troisième présentation ».

1. Modéliser la situation par un arbre pondéré.

   Dans les questions suivantes, les probabilités demandées seront données sous forme d'une fraction irréductible.

2. (a) Calculer la probabilité que la personne interrogée ait suivi une formation avec *conduite accompagnée* et réussi l'examen à sa deuxième présentation.

   (b) Montrer que la probabilité que la personne interrogée ait réussi l'examen à sa deuxième présentation est égale à $\frac{1}{3}$.

   (c) La personne interrogée a réussi l'examen à sa deuxième présentation. Quelle est la probabilité qu'elle ait suivi une formation avec *conduite accompagnée*?

3. On note X la variable aléatoire qui, à toute personne choisie au hasard dans le groupe, associe le nombre de fois où elle s'est présentée à l'examen jusqu'à sa réussite.

   Ainsi, $X = 1$ correspond à l'évènement R_1.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   (b) Calculer l'espérance de cette variable aléatoire. Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

4. On choisit, successivement et de façon indépendante, n personnes parmi les 300 du groupe étudié, où n est un entier naturel non nul. On assimile ce choix à un tirage avec remise de n personnes parmi les 300 personnes du groupe.

   On admet que la probabilité de l'évènement R_3 est égale à $\frac{1}{6}$.

(a) Dans le contexte de cette question, préciser un évènement dont la probabilité est égale à $1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$.

On considère la fonction Python **seuil** ci-dessous, où p est un nombre réel appartenant à l'intervalle $]0;1[$.

```
def seuil(p) :
    n = 1
    while 1-(5/6)**n <= p :
        n = n+1
    return n
```

(b) Quelle est la valeur renvoyée par la commande **seuil**(0,9) ? Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice III

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

— la courbe représentative $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie et dérivable sur $]0\,;\,+\infty[$;

— la tangente T_A à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\,;\,\mathrm{e}\right)$;

— la tangente T_B à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point B de coordonnées $(1\,;2)$.

La droite T_A est parallèle à l'axe des abscisses. La droite T_B coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées $(3\,;\,0)$ et l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0\,;3)$.

On note f' la fonction dérivée de f.

Partie I

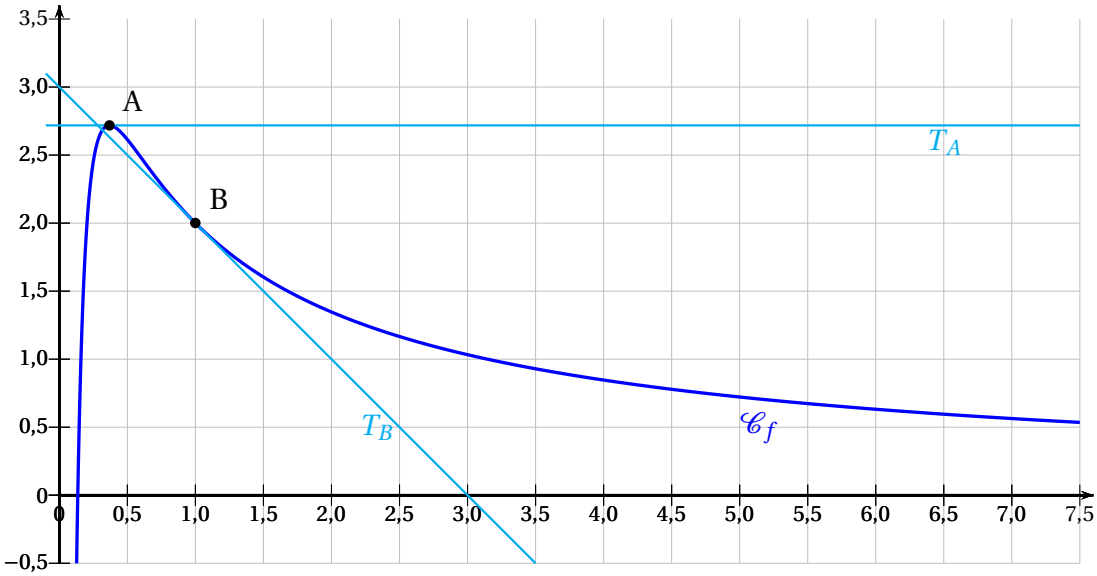
1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f'\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\right)$ et de $f'(1)$.
2. En déduire une équation de la droite T_B.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{2+\ln(x)}{x}.$$

1. Par le calcul, montrer que la courbe $\mathscr{C}_f$ passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs supérieures, et la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. Montrer que, pour tout $x\in]0\,;\,\infty[$,
$$f'(x)=\frac{-1-\ln(x)}{x^2}.$$
4. Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
5. On note f'' la fonction dérivée seconde de f On admet que, pour tout $x\in]0\,;\,+\infty[$
$$f''(x)=\frac{1+2\ln(x)}{x^3}.$$
Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.



Exercice IV

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$, et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \mathrm{e} \times \sqrt{u_n}.$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n,

$$1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2.$$

2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.
   (b) En déduire la convergence de la suite (u_n).
3. Pour tout entier naturel n, on pose

$$v_n = \ln(u_n) - 2.$$

   (a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   (b) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$v_n = -\frac{1}{2^{n-1}}.$$

   (c) En déduire une expression de u_n en fonction de l'entier naturel n.
   (d) Calculer la limite de la suite (u_n).
4. Dans cette question, on s'interroge sur le comportement de la suite (u_n) si l'on choisit d'autres valeurs que 1 pour u_0.
   Pour chacune des affirmations ci-dessous, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant.

   Affirmation 1 : « Si $u_0 = 2\,018$, alors la suite (u_n) est croissante. »
   Affirmation 2 : « Si $u_0 = 2$, alors pour tout entier naturel n, $1 \leqslant u_n \leqslant \mathrm{e}^2$. »
   Affirmation 3 : « La suite (u_n) est constante si et seulement si $u_0 = 0$. »