Correction des exercices sur la loi binomiale

I

On considère qu'à un concours, un candidat a 20 % de chances de réussir.
On prend un groupée 25 candidats au hasard.

1. Notons X la variable aléatoire comptant le nombre de candidats reçus à ce concours.
   On peut considérer qu'il y a répétition d'épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc Y suit la loi binomiale $\boxed{\mathscr{B}(25\ ;\ 0,2)}$.

   Rappel : $p(X=k) = \binom{25}{k} \times 0,2^k \times 0,8^{25-k}$.

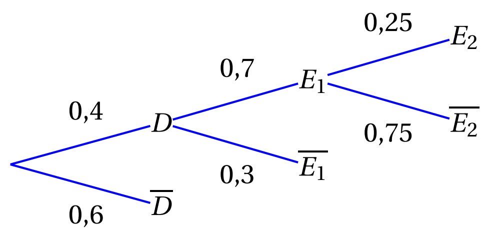
   La probabilité qu'au moins deux candidats réussissent est alors $p(X \geqslant 2)$.
   $p(X \geqslant 2) = p(X=2) + p(X=3) + \cdots + p(X=25)$. C'est trop compliqué à calculer directement. On utilise l'événement contraire.

   $p(X \geqslant 2) = 1 - p\left(\overline{X \geqslant 2}\right) = 1 - p(X<2) = 1 - p(X \leqslant 1) = 1 - \left[p(X=0) + pX = 1\right]$.
   On obtient, en utilisant la formule rappelée ci-dessus :
   $p(X \leqslant 2) = 1 - \left[\binom{25}{0} \times 0,2^0 \times 0,8^25 + \binom{25}{1} \times 0,2 \times 0,24^{24}\right]$
   $= 1 - \left[0,8^25 + 25 \times 0,2 \times 0,24^{24}\right] \approx \boxed{0,97}$
   .
   On peut aussi effectuer le calcul **directement à la calculatrice** :
   Sur TI : il faut utiliser la fonction BinomFRep :
   Plus exactement, taper : 1-distrib (2nv var) (25,0.2,1) Entrée

   Sur Casio :
   1 - Option (OPTN) STAT(F5) DIST(F3) BINOMIAL(F5) Bpd(F1)1,25,0.2) EXE
2. La probabilité qu'au plus deux candidats réussissent est $p(X \leqslant 2) \approx 0,098$
3. La probabilité que dix candidats réussissent est $\boxed{p(X=10) \approx 0,011}$.
4. Le nombre moyen de candidats qui réussissent sur 25 candidats qui passent le concours est l'espérance de X.
   Or, $E(X) = np = 25 \times 0,2 = \boxed{5}$.

II Métropole juin 2012

1. (a)



   (b) On a $p(E_1) = p(D \cap E_1) = p(D) \times p_D(E_1) = 0,4 \times 0,7 = 0,28$.

   (c) Calculons la probabilité de ne pas être recruté, soit :
   $p(F) = p\left(\overline{D}\right) + p\left(D \cap \overline{E_1}\right) + p\left(D \cap \overline{E_2}\right) = 0,6 + 0,4 \times 0,3 + 0,4 \times 0,7 \times 0,75 = 0,6 + 0,12 + 0,21 = 0,93$. D'où $p\left(\overline{F}\right) = 1 - p(F) = 1 - 0,93 = 0,07$.
   On peut directement calculer la probabilité d'être recruté, soit :
   $p\left(\overline{F}\right) = p(D \cap E_1 \cap E_2) = 0,4 \times 0,7 \times 0,25 = 0,07$.
   D'où $p(F) = 1 - p\left(\overline{F}\right) = 1 - 0,07 = 0,93$.
2. (a) Chaque dossier est étudié indépendamment des autres et chaque candidat a une probabilité d'être recruté égale à $0,07$. La variable X suit donc une loi binomiale $(\mathscr{B}, n=5,\ p=0,07)$.

(b) On a $p(X=2)=\binom{5}{2}0,07^2\times 0,93^3 = 10\times 0,07^2\times 0,93^3 \approx 0{,}0394 \approx 0,039$ à 10^{-3} près

3. On reprend ici la loi binomiale mais avec n candidats chacun ayant une probabilité d'être recruté égale à $0,07$.

La probabilité qu'aucun ne soit retenu est égale à : $\binom{0}{n}\times 0,07^0\times 0,93^n = 0,93^n$.

La probabilité qu'un au moins des n candidats soit recruté est donc égale à $1-0,93^n$.

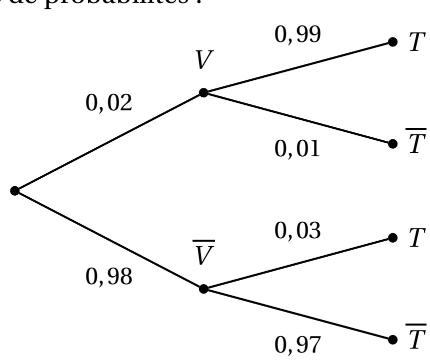
Deux possibilités :

- À la calculatrice, en utilisant la fonction $f :: x \mapsto 1-0,93^x$ et en faisant varier x par pas de 1 (ou d'abord par pas de 5, puis en affinant par pas de 1…)
  On trouve $\boxed{n \geqslant 96}$
- On peut résoudre l'inéquation à laide d ela fonction logarithme népérien ln, mais pas encore étudiée :
  $1-0,93^n > 0,999 \iff 0,001 > 0,93^n \iff \ln 0,001 > n\ln 0,93$ (par croissance de la fonction ln) $\iff n > \dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93}$ car $\ln 0,93 < 0$.
  Or $\dfrac{\ln 0,001}{\ln 0,93} \approx 95,1$.
  Il faut donc traiter **au moins 96** dossiers pour avoir une probabilité supérieure à 0,999 de recruter au moins un candidat.

III Métropole juin 2011

PARTIE A

1. (a) D'après l'énoncé, on a : $P(V)0,02$; $P_V(T)=0,99$; $P_{\overline{V}}(\overline{T})=0,97$.
   Traduisons la situation par un arbre de probabilités :



   (b) $P(V\cap T)=P_V(T)\times P(V)=0,99\times 0,02=\boxed{0{,}0198}$

2. Par conséquent : $P(V)=P(V\cap T)+P\left(V\cap \overline{T}\right)=P_T(V)\times p(T)+P_{\overline{V}}(T)\times P\left(\overline{V}\right)$ (formule des probabilités conditionnelles).
   Alors : $P(T)=0,99\times 0,02+0,03\times 0,98=\boxed{0{,}0492}$.

3. (a) Il faut calculer $P_T(V)$. Or : $P_T(V)=\dfrac{P(V\cap T)}{P(T)}=\dfrac{0{,}0198}{0{,}0492}\approx\boxed{0{,}4024}$, soit environ 40%.
   Il n'y a bien qu'environ 40 % de « chances » que la personne soit contaminée », sachant que le test est positif.
   (b) La probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée par le virus sachant que son test est négatif est $P_{(T)}\left(\overline{V}\right)=\dfrac{P\left(\overline{V}\cap\overline{T}\right)}{P(\overline{T})}=\dfrac{0{,}97\times 0{,}98}{1-0{,}0492}\approx\boxed{0{,}9997}$, c'est-à-dire environ 99,97 %.

PARTIE B

1. On a répétition de 10 épreuves identiques indépendantes à deux issues, donc X suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10\,;\,0,02)$.

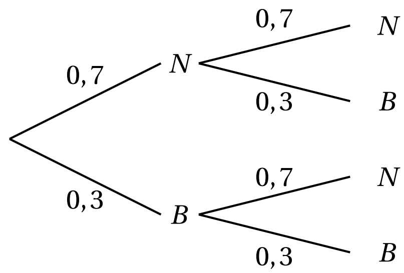
2. Pour tout k, $(0 \leqslant k \leqslant 10)$, on a $P(X=k)=\dbinom{10}{k}\times 0,02^k\times(1-0,02)^{10-k}$.

   Alors : $P(X\geqslant 2)=1-(P(X<2))=1-[P(X=0)+P(X=1)]=1-\left[0,98^{10}+10\times 0,02\times 0,98^9\right]$
   $P(X\geqslant 2)\approx \boxed{0{,}0162}$

IV Asie juin 2012

Partie A

1.



   D'où : $p=P(G)=0,7\times 0,3+0,3\times 0,7\Rightarrow \boxed{p=0,42}$.

2. Soit n un entier tel que $n>2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
   On note X la variable aléatoire qui comptabilise nombre de parties gagnées par le joueur, et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

   (a) L'expérience aléatoire a deux issues :
   — succès : le joueur gagne avec une probabilité de $p=0,42$
   — échec : le joueur perd avec une probabilité de $q=1-p=0,58$

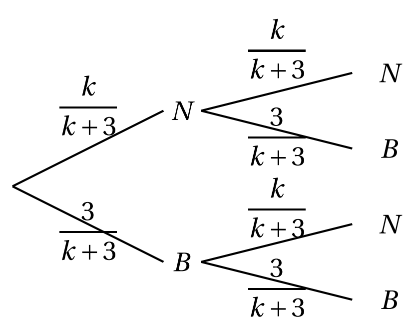
   On répète cette expérience n fois de manière indépendante. Donc, **la variable aléatoire qui compte le nombre de succès suit une loi binomiale de paramètres n et p** .

   (b) $p_n=1-P(X=0)=\boxed{1-0,58^n=p_n}\Longrightarrow p_{10}=1-0,58^{10}\approx\boxed{0,996}$

   (c) $1-0,58^n\geqslant 0,99\Rightarrow 0,01\geqslant 0,58^n\Rightarrow \ln(0,01)\geqslant \ln\left(0,58^n\right)$
   $\Rightarrow \dfrac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)}\leqslant n\Rightarrow$ $\boxed{\textbf{le joueur doit jouer au moins 9 parties}}$.
   Remarque : comme nous n'avons pas encore étudié la fonction ln, on pouvait trouver n à l'aide d'un tableau de valeurs à la calculatrice.

Partie B

1. (a)



$$p\,(Y_k=5)=\frac{k}{(k+3)}\times\frac{3}{(k+3)}+\frac{3}{(k+3)}\times\frac{k}{(k+3)}\Longrightarrow \boxed{p\,(Y_k=5)=\frac{6k}{(k+3)^2}}$$

   (b) On en déduit la loi de probabilité de la variable aléatoire $Y-k$:

y_i	-9	-1	$+5$
$P\left(Y_k=y_i\right)$	$\dfrac{9}{(k+3)^2}$	$\dfrac{k^2}{(k+3)^2}$	$\dfrac{6k}{(k+3)^2}$

2. $\text{E}(Y_k) = \sum_{i=1}^{i=3} y_i \times p\left(Y_k = y_i\right) = -9 \times \frac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} = \frac{-81 - k^2 + 30k}{(k+3)^2} = \boxed{\frac{-(k-3)(k-27)}{(k+3)^2}}$ (après calcul des racines et factorisation)
D'où :

$$\text{E}\left(Y_k\right) > 0 \Longleftrightarrow \boxed{k \in]3\ ;\ 27[}$$

$\boxed{\text{Le jeu est favorable au joueur pour } k \in]3\ ;\ 27[}$.