Spécialité mathématiques Première : devoir n° 1

Exercice I

1. Déterminer la forme canonique de l'expression : $A(x) = -2x^2 + 8x - 12$.
2. (a) Déterminer la forme canonique de l'expression : $B(x) = x^2 - \sqrt{3}x - 1$.
   (b) En déduire que, pour tout réel x,
$$x^2 - \sqrt{3}x \geqslant -\frac{3}{4}.$$

Exercice II

Pour se rendre d'une ville A à une ville B distantes de 195 km, deux cyclistes partent en même temps de la ville A. L'un des cyclistes, dont la vitesse moyenne sur ce parcours est supérieure de 4 km/h à celle de l'autre, arrive 1 heure plus tôt à la ville B.
Quelle est la vitesse moyenne de chacun des deux cyclistes? **Justifier avec soin**.

Exercice III

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $\dfrac{x}{x-1} \leqslant \dfrac{x+2}{2x}$

Exercice IV

On veut résoudre l'équation $(E)\ :\ x^4 - x^2 - 6 = 0$.

1) On pose $X = x^2$.
   Montrer que l'équation E équivaut à
$$\begin{cases} X = x^2 \\ X^2 - X - 6 = 0 \end{cases}.$$
2) Résoudre l'équation $X^2 - X - 6 = 0$. On appellera les solutions X_1 et X_2.
3) En déduire les solutions de l'équation (E).

Exercice V

Soit $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2 - 3x + 2$ et A le point de coordonnées $A(-2\ ;\ 3)$.
Le point B est un point de l'axe des ordonnées ayant pour pour ordonnée m.

1. Montrer que l'équation de la droite (AB) est
$$y = \frac{m-3}{2}x + m.$$
2. Montrer que l'abscisse x d'un point d'intersection de $\mathscr{P}$ et de la droite (AB) est solution de l'équation :
$$2x^2 - (m+3)x + 4 - 2m = 0.$$
3. Montrer que le discriminant de cette équation est $m^2 + 22m - 23$ et en déduire le nombre de points d'intersection entre $\mathscr{P}$ et (AB) en fonction de m.

Exercice VI

Une feuille a une épaisseur de 0,1 mm, que l'on note e_0.
Si on la plie en deux, on obtient une feuille d'une épaisseur de 0,2mm, que l'on note e_1.
Pour tout entier naturel n, on note e_n l'épaisseur de la feuille (en mm) après le n^{e} pliage.

1) Quelle est la nature de la suite (e_n) ?
2) Pour tout entier naturel n, exprimer e_n fonction de n.
3) Calculer e_{20}. Ce résultat semble-t-il possible dans la réalité ?
4) En admettant que l'on puisse le faire, quelle serait l'épaisseur e_{42} au bout de 42 pliages.
   Comparer avec la distance moyenne entre la Terre-Lune qui vaut 384 400 km.

Exercice VII

Soit N un entier naturel non nul.
On définit la suite (u_n) par : $u_0 = N$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} = \begin{cases} \dfrac{u_n}{2} \text{ si } n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}.$$

1. On suppose que $N = 1$; calculer les premiers termes ; que remarque-t-on ?
2. On suppose que $N = 3$; calculer u_n pour n allant de 1 à 12 ; que remarque-t-on ?
3. On suppose que $N = 8$; calculer u_n pour n allant de 1 à 12 ; que remarque-t-on ?
4. Que se passe-t-il si N est une puissance de 2 ?
5. On suppose que $N = 15$; calculer u_n pour n allant de 1 à 12 ; que remarque-t-on ?

Exercice VIII

Une entreprise décide de verser à ses ingénieurs une prime annuelle de 500 €.
Pour tenir compte de l'inflation, il est prévu que, chaque année, la prime augmente de 2 % par rapport à l'année précédente.
On note (u_n) la suite des primes avec $u_1 = 500$.

1. Calculer u_2 puis u_3 (c'est-à-dire la prime versée par l'entreprise la 2^e^ année et la 3^e^ année)
2. Exprimer u_{n+1} en fonction de u_n.
   En déduire la nature de la suite (u_n).
3. Un ingénieur compte rester 20 ans dans cette entreprise à partir du moment où est versée la prime.
   Calculer la prime qu'il touchera la 20^e^ année, c'est-à-dire u_{20}.
4. Calculer la somme totale S des primes touchées sur les 20 années, c'est-à-dire $S = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{20}$