Spécialité Première : devoir sur feuille n° 4

Exercice I

En utilisant les angles associés, simplifier les expressions suivantes :

$A = \sin(\pi + x) + \cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) + \sin x - \sin(-x)$

$B = \cos\dfrac{\pi}{7} + \cos\dfrac{9\pi}{14} + \cos\dfrac{8\pi}{7} + \cos\dfrac{23\pi}{14}$

Exercice II

Résoudre les équations et inéquations suivantes sur les intervalles considérés. On pourra s'aider d'un cercle trigonométrique.

1) $\cos x = \cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)$ sur $[0\,;\,3\pi]$
2) $\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ sur $]-\pi\,;\,\pi]$
3) $\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \cos\dfrac{\pi}{5}$ sur $[0\,;\,4\pi]$

Exercice III

1) Sachant que $\cos\left(\dfrac{9\pi}{5}\right) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$, calculer $\sin\left(\dfrac{9\pi}{5}\right)$.
2) En déduire les valeurs de $\cos\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$ et de $\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$.

Exercice IV

Résoudre l'équation ci-dessous dans $[0\,;\,2\pi]$:

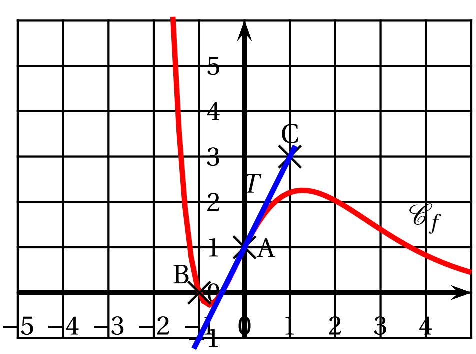
$$2\cos^2 x = 1 + \cos x$$

Exercice V

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathscr{C}_f$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$. $\mathscr{C}_f$ passe par les points A(0; 1) et B(-1; 0).
T est la tangente à $\mathscr{C}_f$ en A et passe par le point C(1; 3).
On sait également que, pour tout x réel,

$$f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$$

où a, b, c sont des nombres réels.



1) Déterminer, pour tout x réel, $f'(x)$.
2) Déterminer alors les valeurs de a, b et c, en justifiant.

Exercice VI

Soit la fonction g, définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1 - x + e^x$. .

1) Déterminer l'expression de $g'(x)$.
2) En déduire les variations de g.
3) Déterminer l'extremum local de g puis en déduire le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

On définit maintenant la fonction f sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x + 1 + \frac{x}{e^x}.$$

4) Démontrer que pour tout réel x, on a : $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
5) En déduire les variations de f.
6) Donner l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
7) Étudier la position relative de $\mathscr{C}_f$ et T.

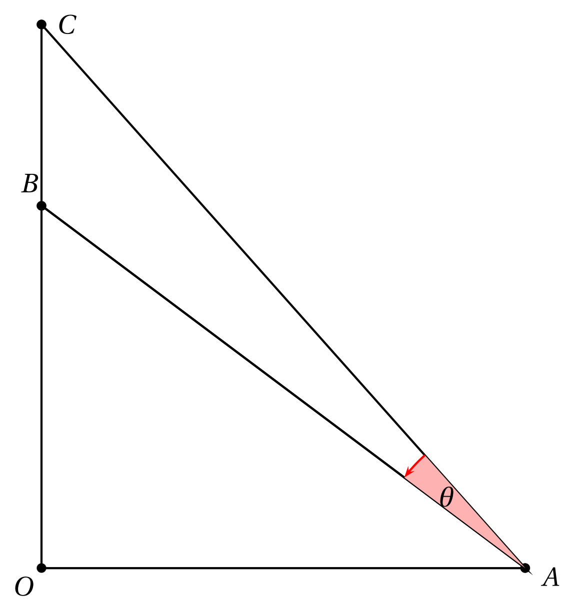
Exercice VII

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x-2)e^x + x + 1$.

1) Déterminer une expression de $f'(x)$.
2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^x + 1$.
   a) Étudier les variations de la fonction g.
   b) En déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.
3) Montrer que $f'(x) = g(x)$ et en déduire les variations de f.

Exercice VIII

On donne la figure suivante avec OA= 16, $OB = 12$ et $BC = 6$.



1) Justifier que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = OA^2 + OB \times OC$.
2) Calculer les valeurs exactes des longueurs AB et AC.
3) Calculer les valeurs exactes de $\cos\theta$ puis donner une valeur approchée de θ en degré au dixième près.