Trigonométrie

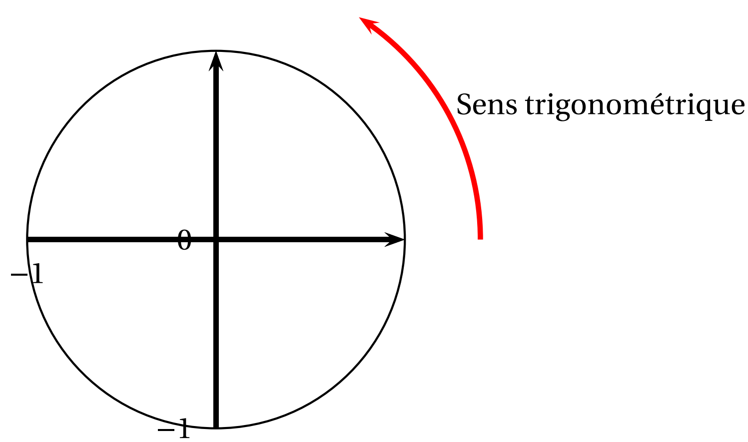
Table des matières

I Cercle trigonométrique et mesure en radian d'un angle

I.1 Cercle trigonométrique

Définition

Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r.
On appelle sens trigonométrique (ou sens direct) le sens inverse de rotation des aiguilles d'une montre.



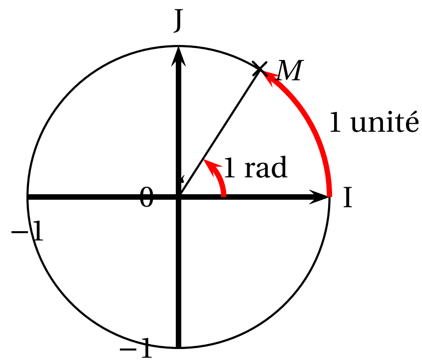
Définition

On se place dans un repère orthonormé (O; I; J).
Le cercle de centre $O(0\ ;\ 0)$ et de rayon 1 parcouru dans le sens trigonométrique est appelé le **cercle trigonométrique**.

I.2 Mesure d'un angle en radian

On rappelle que le périmètre d'un cercle de centre r est $2\pi r$.
Le cercle trigonométrique a donc un périmètre égal à 2π.

On considère le cercle trigonométrique :
Sur ce cercle, sin place le point M tel que l'arc de cercle mesure 1 unité.
Par définition, l'angle $\widehat{IOM}$ mesure 1 radian (noté 1 rad)



Remarque : puisque le périmètre du cercle est 2π, un tour de cercle correspond à un angle de 2π rad.

Propriété admise

La longueur d'un arc de cercle est proportionnelle à l'angle au centre correspondant.

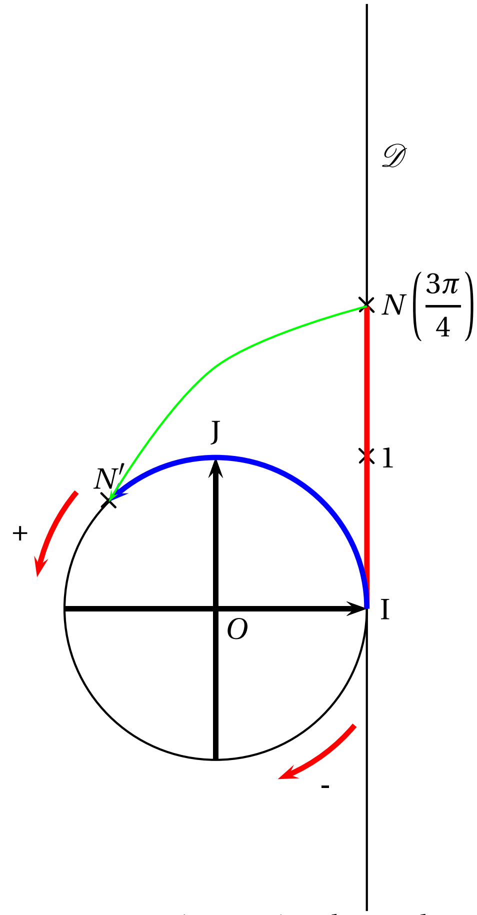
On en déduit le tableau de proportionnalité suivant :

Angle en degré	0	30	45	60	90	180	360	1	$\dfrac{180}{\pi}$
Angle en radian	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π	2π	$\dfrac{\pi}{180}$	1

II Enroulement de la droite des réels

II.1 Enroulement

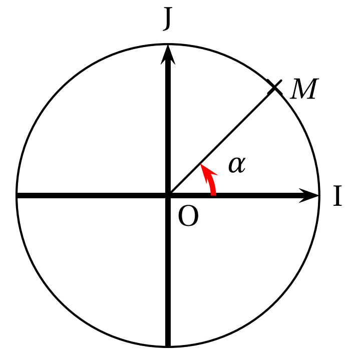
Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique.
Soit $\mathscr{D}$ la droite tangente eau cercle $\mathscr{C}$ en I, qu'on munit Dun repère orthonormé d'origine I.
On enroule cette droite autour de $\mathscr{C}$; la demi-droite dont les abscisses des points sont positives dans le sens trigonométrique, l'autre ârttie de $\mathscr{D}$ dans le sens indirect.
Ainsi, le point N d(abscisse $\frac{3\pi}{4}$ sur $\mathscr{D}$ (donc $IN = \frac{2\pi}{4}$) vient-il se placer en N' tel que l'arc $\widehat{IN'}$ ait une longueur égale à $\frac{3\pi}{4}$



Remarque : Plusieurs points de la droite orientée viennent se placer en un même point du cercle. La droite orientée peut en effet s'enrouler plusieurs fois autour du cercle dans un sens et dans l'autre.
Il suffit que la distance entre deux points de $\mathscr{D}$ soit égale à un multiple de 2π (périmètre de $\mathscr{C}$).
Par exemple, les points d'abscisses $\frac{\pi}{3}$ et $-\frac{5\pi}{3}$ viennent se place au même endroit, car $\frac{\pi}{3} - \left(\frac{-5\pi}{3}\right) = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$.
Une infinité de points der $\mathscr{D}$ vient se place sur le même point de $\mathscr{C}$ par enroulement, puisqu'une droite est illimitée.

II.2 Mesure principale d'un angle

Puisqu'on peut se déplacer sur $\mathscr{C}$ de deux sens différents, on dit que les angles sont orientés. Les mesures d'angles sont comptées positivement si on tourne dans le sens direct à partir de 0 et négativement si on trouve dans le sens indirect.
Sur la figure ci-contre, la mesure de l'angle orienté entre les vecteurs $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$, notée $\left(\overrightarrow{OI}\ ;\ \overrightarrow{OM}\right)$ est α.



Alors, la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OM}\ ;\ \overrightarrow{OI}\right)$ est $-\alpha$.
Puisqu'on peut faire autant de tours de cercles que l'on veut, tout angle de la forme $\alpha + k \times 2\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$ est une mesure de l'angle $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$.
On dit que l'angle $\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ est égal à α **modulo** 2π, qu'on écrit parfois α $[2\pi]$.

Définition

La mesure principale d'un angle orienté est la mesure, qui parmi toutes les autres, se situe dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

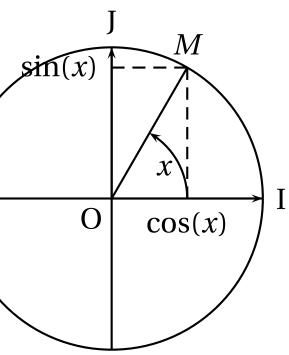
Exemples :

- La mesure principale de $\dfrac{13\pi}{6}$ est $\dfrac{P}{6}$ car $\dfrac{13\pi}{6} = \dfrac{12\pi+\pi}{6} = 2\pi + \dfrac{\pi}{6}$.
- La mesure principale de $-\dfrac{25\pi}{3}$ est $-\dfrac{\pi}{3}$ car $-\dfrac{25\pi}{3} = \dfrac{-24\pi-\pi}{3} = -8\pi - \dfrac{\pi}{3} = -4\times 2\pi - \dfrac{\pi}{3}$.

III Fonctions sinus et cosinus

III.1 Cosinus et sinus d'un angle

Soit M un point du cercle trigonométrique muni d'un repère orthonormal $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$ et soit x une mesure en radians de l'angle $\widehat{AOM}$.



Définition

On appelle cosinus de x et sinus de x les coordonnées du point M dans le repère $\left(O\ ;\ \overrightarrow{i}\ ;\ \overrightarrow{j}\right)$.
On note : $M\left(\cos(x)\ ;\ \sin(x)\right)$

On peut remarquer que, si l'angle est aigu, $(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2})$, cette définition côincide avec celle vue en collège dans un triangle rectangle, qui montre, en utilisant le théorème de Thalès, que le cosinus d'un angle ou son sinus ne dépend pas de la taille du triangle rectangle utilisé.

Propriété

Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

- $\cos(x+2\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2\pi) = \sin(x)$
- Plus généralement, Pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$

Remarque : on écrit souvent, par abus de langage, $\cos x$ à la place de $\cos(x)$, de même que $\sin x$ à la place de $\sin(x)$.

Définition

On appelle fonction sinus, notée sin, la fonction $x : x \mapsto \sin(x)$ et fonction cosinus, notés cos, la fonction $x : x \mapsto \cos(x)$.
Comme $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$, on dit que les fonction cos et sin sont périodiques de période 2π ou $2\pi -$ périodiques.

Propriétés

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leqslant \cos(x) \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin(x) \leqslant 1$

b) $[\cos(x)]^2 + [\sin(x)]^2 = 1$ qu'on écrit plus simplement : $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$ (attention à la place de l'exposant!)

c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\sin(-x) = -\sin(x)$ (on dit que la fonction sin est impaire.

d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(-x) = \sin(x)$ (on dit que la fonction cos est paire.

Justification :

a) Le cercle trigonométrique a pour rayon 1, donc les abscisses et ordonnées des points de ce cercle sont comprises entre -1 et 1.

b) Calculons OM^2 :
$OM^2 = 1^2 = 1$ car le rayon du cercle est 1 mais on a aussi : $M\,(\cos s\ ;\ \sin x)$ donc $OM^2 = \cos^2 x + \sin^2 x$.

c) Les points du cercle $\mathscr{C}$ correspondant à des angles x et $-s$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses ; ils ont la même abscisse et des ordonnées opposées.

III.2 Quelques valeurs remarquables

On a :

a) $\cos(0) = 1$ et $\sin(0) = 0$ (coordonnées de I dans le repère $(O\,;\,I\,;\,J)$)

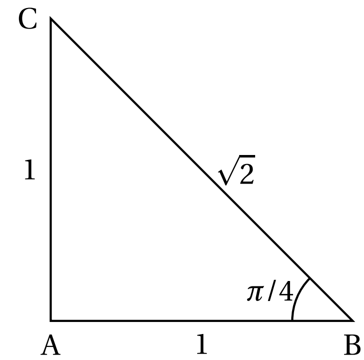
b) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ (coordonnées de J).

c) Angle de $\dfrac{\pi}{4}$ rad :

Pour faire apparaître un angle de $\dfrac{\pi}{4}$, on utilise un triangle rectangle isocèle de côté 1.
L'hypoténuse est $BC = \sqrt{2}$ en appliquant le théorème de Pythagore.
Alors :

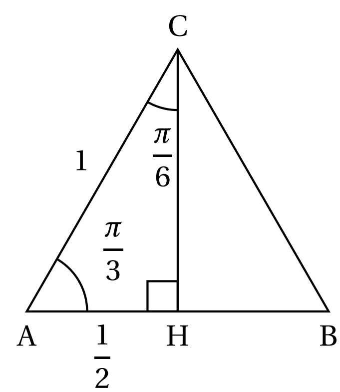
$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$\sin\frac{\pi}{4} = \frac{AC}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$



d) Angles de $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{3}$.
Pour faire apparaître « naturellement » un angle de $\dfrac{\pi}{3}$, on utilise un triangle équilatéral ABC de côtés 1.

On fait alors apparaître un triangle rectangle en prenant la hauteur $[AH]$ de ce triangle équilatéral. Comme le triangle ABC est équilatéral, (AH) est aussi médiatrice et bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$.
On en déduit $\widehat{BAC} = \dfrac{\pi}{3}$ et $\widehat{ACH} = \dfrac{\pi}{6}$
On va utiliser le triangle rectangle AHC.



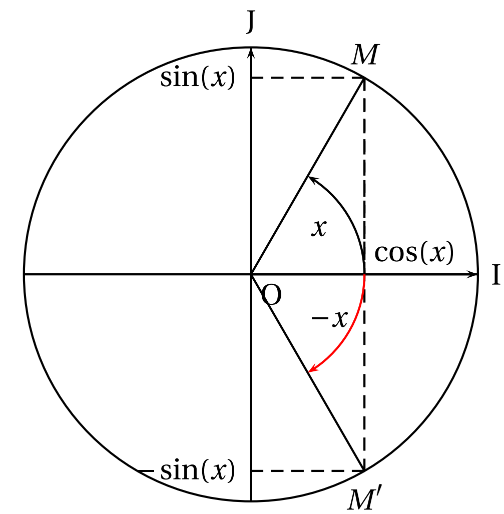
- D'après ke théorème de Pythagore,
  $CH^2 = AC^2 - AB^2 = 1 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4}$, d'où :
  $HC = \sqrt{\dfrac{3}{4}} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$.
- $\cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{AH}{AC} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$
- $\sin\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{HC}{AC} = \dfrac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \boxed{\dfrac{\sqrt{3}}{2}}$
- On remarque que $\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{HC}{AC} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{AH}{AC} = \cos\left(\dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{2}$

Résumé :

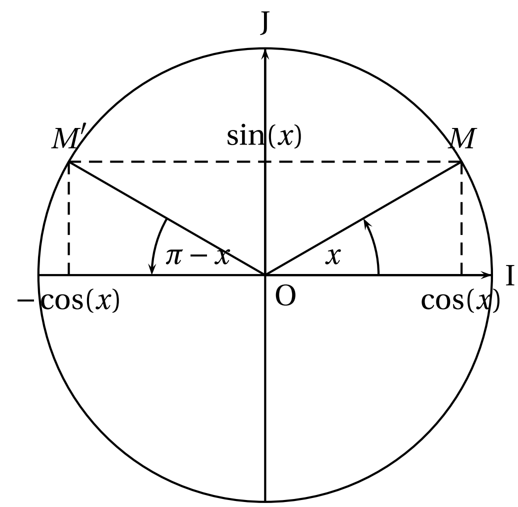
x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\sin(x)$	0	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
$\cos(x)$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0	-1

III.3 Angles associés

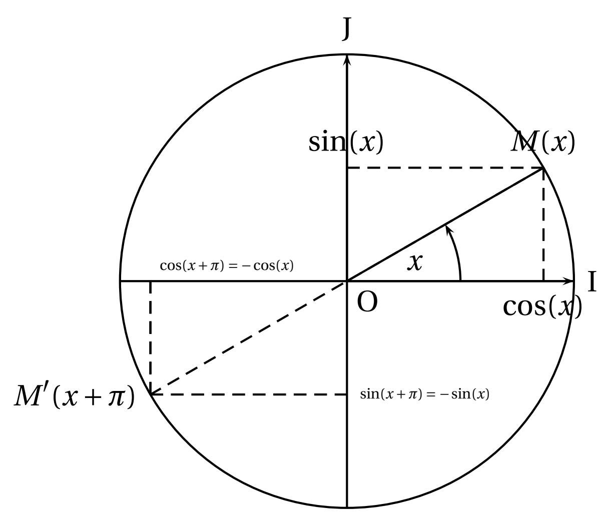
1. Par symétrie par rapport à l'axe des abscisses :
   $\cos(-x)=\cos(x)$
   $\sin(-x)-\sin(x)$



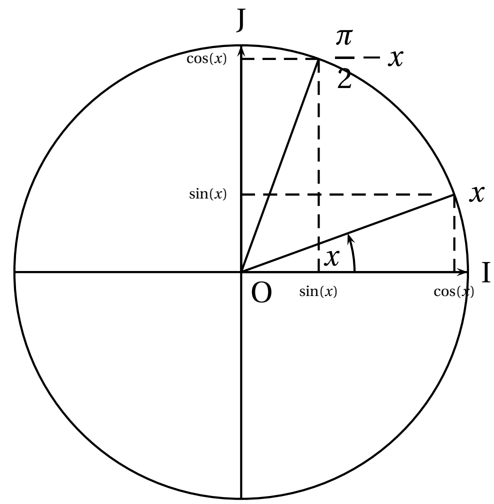
2. Par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées :
   $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$
   $\sin(\pi-x)=\sin(x)$



3. En effectuant un demi-tour :
   $\cos(x+\pi)=-\cos(x)$
   $\sin(x+\pi)=-\sin(x)$
   (cela revient à effectuer une symétrie par rapport à O)

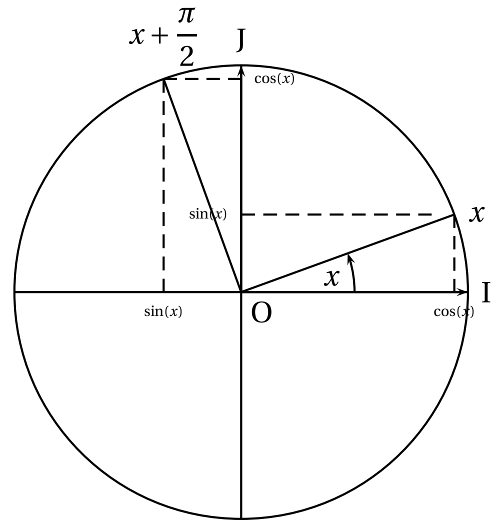


4.



Par symétrie par rapport à la première bissectrice (d'équation $y = x$:
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$

5.



$\cos\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
$\sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

III.4 Courbes représentatives des fonctions sinus et cosinus

Les fonctions sinus et cosinus sont **périodiques** de période 2π, il suffit donc de les étudier sur $]-\pi\,;\,\pi]$.
Le comportement de ces fonctions hors de cet intervalle s'en déduira en prolongeant la courbe par 2π-périodicité.

Etude de la fonction cosinus : Cette fonction est paire, donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Il suffit de l'étudier sur $[0\,;\,\pi]$.
Ci-dessous un tableau de valeurs et le tableau de variations de la fonction cos sur $[0\,;\,\pi]$:

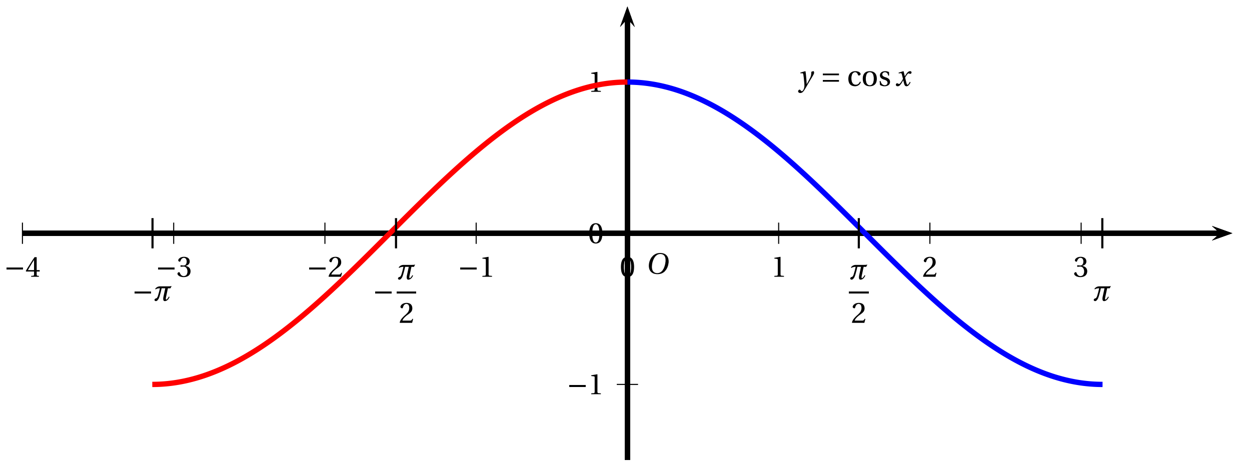
x	0	$\dfrac{\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\dfrac{1}{2}$	0

Tableau de variation

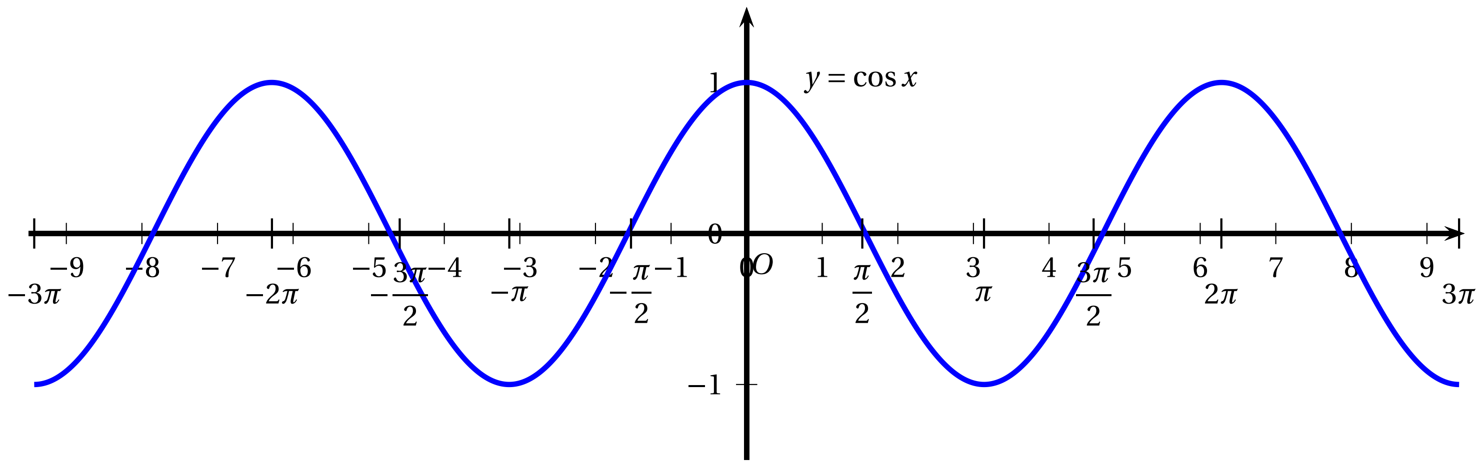
x	0	$\dfrac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$	1 ↘	0 ↘	-1

Courbe représentative :

Sur $[-\pi\ ;\ \pi]$:



Sur $[-3\pi\ ;\ 3\pi]$:



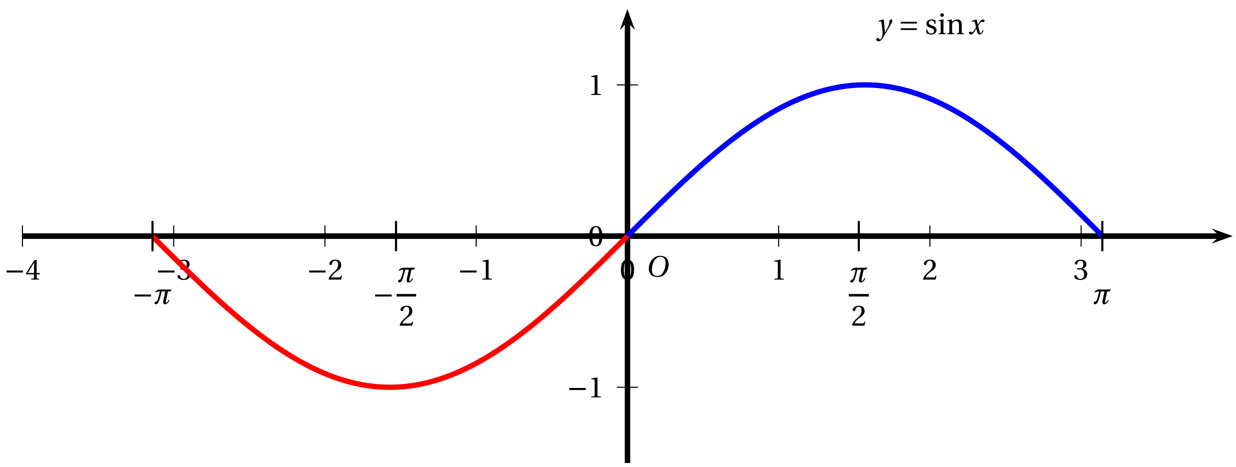
Etude de la fonction sinus : Cette fonction est impaire, donc sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine.
Il suffit de l'étudier sur $[0~;~\pi]$.
Ci-dessous un tableau de valeurs et le tableau de variations de la fonction sin sur $[0~;~\pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

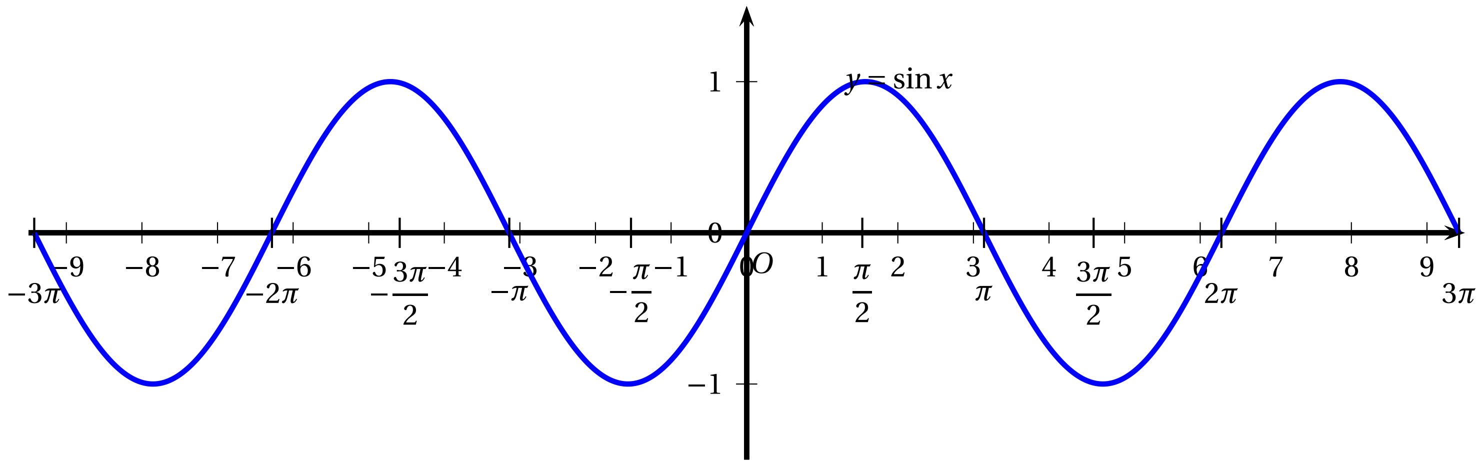
Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

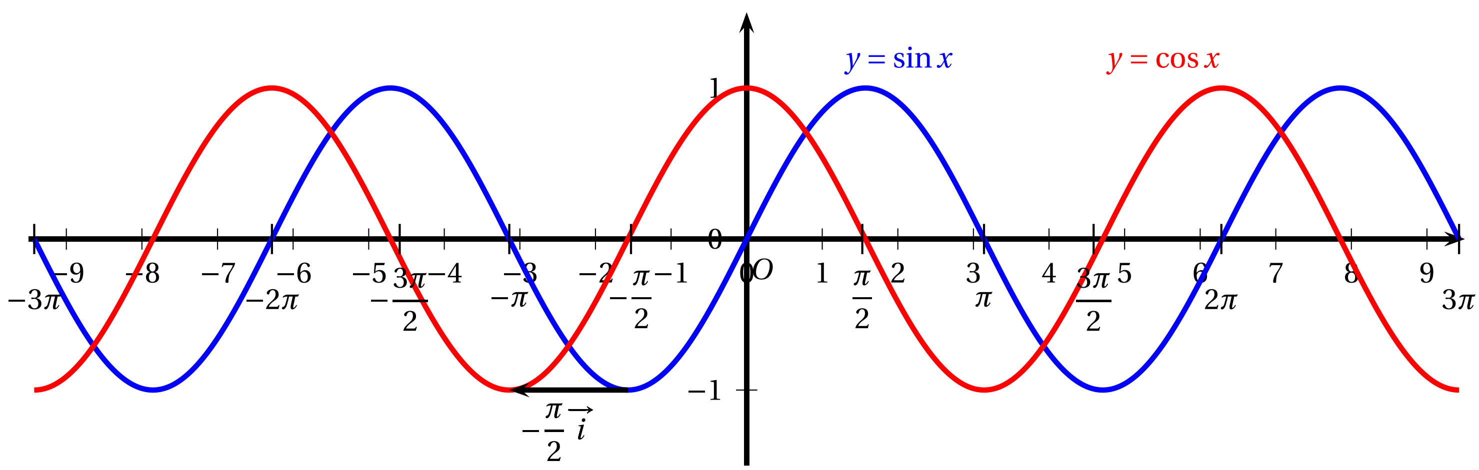
Courbe représentative :
Sur $[-\pi~;~\pi]$:



Sur $[-3\pi\ ;\ 3\pi]$:



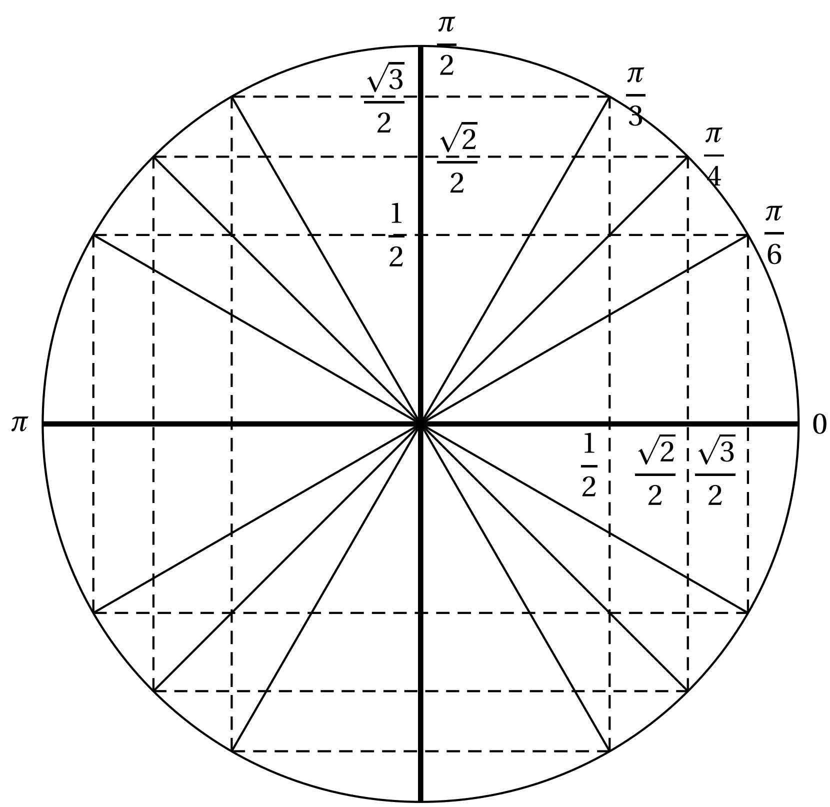
Remarque : pour tout x, $sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$ donc la courbe représentative de la fonction cos est celle de la fonction sin, translatée de $-\frac{\pi}{2}\overrightarrow{i}$.
C'est pourquoi on les appelles **sinusoïdales**.



IV Cercle trigonométrique

On peut facilement placer les angles remarquables sur un cercle trigonométriques, à partir des valeurs de leurs cosinus ou sinus..
Pour cela :

- On trace ce cercle trigonométrique, ainsi que le repère orthonormé $[O\,;\ I\,;\ J]$.
- On trace les droites d'équations $x = \dfrac{1}{2}$ et $y = \dfrac{1}{2}$ (astuce : sur sa feuille, prendre un rayon égal à un nombre pair de carreaux) : ces droites permettent de placer respectivement $\dfrac{\pi}{3}$ et $\dfrac{\pi}{6}$
- Ces deux droites se coupent en un point et on trace la droite qui passé par l'origine O et ce point d'intersection : c'est la bissectrice du « premier quadrant » correspondant à l'angle de mesure $\dfrac{\pi}{4}$.



V Équations trigonométriques

V.1 Équation $\cos x = \cos a$

Propriété

Soit a un réel.
L'équation $\cos x = \cos a$ a pour solutions :

- $x = a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $x = -a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Exemple : résoudre l'équation $\cos x = \dfrac{1}{2}$.

$\cos x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \cos x = \cos \dfrac{\pi}{3}$.

Les solutions sont de la forme : $x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

V.2 Équation $\sin x = \sin a$

Propriété

Soit a un réel.
L'équation $\sin x = \sin a$ a pour solutions :

- $x = a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$
- $x = \pi - a + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

Exemple : résoudre l'équation $\sin x = \dfrac{1}{2}$.

$\sin x = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \dfrac{\pi}{6}$.

Les solutions sont de la forme : $x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$ ou $x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$, donc $x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.