Probabilités conditionnelles, indépendance

Table des matières

Activités préparatoire page 273

Activité 1

a) Ω est l'ensemble des lettres de l'alphabet.
$p(\text{« taper une voyelle »}) = \dfrac{6}{26} = \dfrac{3}{13}$ (situation d'équiprobabilité)

b) $(\text{« taper une lettre du mot hasard »}) = \dfrac{5}{26}$

c) $(\text{« taper une voyelle du mot hasard »}) = \dfrac{1}{26}$

d) $p\left(\text{« taper une voyelle ou une lettre du mot hasard »}\right) = \dfrac{6}{26} + \dfrac{5}{26} - \dfrac{1}{26} = \dfrac{10}{26} = \dfrac{5}{13}$.

Activité 2

1. $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = 0,5 + (1 - 0,7) - 0,12 = 0,68$
2. $p(A \cap B) = p(A) + p(B) - p(A \cup B) = \dfrac{1}{4} + \dfrac{3}{5} - \dfrac{7}{10} = \dfrac{3}{20}$

Activité 3

Situation 1 : On suppose que la probabilité d'obtenir 6 est deux fois plus grande que celle de ne pas obtenir 6.
$p(\text{« obtenir 6 »}) + p(\text{« ne pas obtenir 6 »}) = 1 \Leftrightarrow 2p(\text{« ne pas obtenir 6 »}) + p(\text{« ne pas obtenir 6 »}) = 1 \Leftrightarrow 3p(\text{« ne pas obtenir}$
$1 \Leftrightarrow p(\text{« ne pas obtenir 6 »}) = \dfrac{1}{3}$, donc $p(\text{« obtenir 6 »}) = \dfrac{2}{2}$

Situation 2 : on note p la probabilité d'avoir 1, alors la probabilité d'avoir 2 est $2p$, celle d'avoir 3 est $3p$ …etc..
On en déduit : $p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1$, d'où $p = \dfrac{1}{21}$ et donc la probabilité d'avoir 6 est $\dfrac{6}{21} = \dfrac{2}{7}$

1.

	Ananas en promotion	Ananas sans promotion	Total
Banane en promotion	61	52	113
Banane sans promotion	31	56	87
Total	92	108	200

2. - $p(A) = \dfrac{113}{200}$
   - $p(B) = \dfrac{61}{200}$
   - $p(C) = \dfrac{108}{200} = \dfrac{27}{50}$
   - $p(D) = \dfrac{61}{200}$
   - $p(E) = \dfrac{92+113-61}{200} = \dfrac{144}{200} = \dfrac{18}{25}$

Activité 6

1. Les issues possibles sont donc : $\Omega = \{PPP, PPF, PFP, PFF, FPP, FPF, FFP, FFF\}$.
2. La probabilité de chaque issue est $\dfrac{1}{8}$ (équirobabilité)
3. p(au moins une fois Face) = 1$_P$(n'avoir aucune fois F) = $\dfrac{7}{8}$

Activité 7

1. $p = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{2}{3}$
2. $p = \dfrac{2}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{3}$

Activité 1 page 274

1. - $p(M) = \dfrac{20}{5000} = \dfrac{1}{250}$
   - $p(T) = \dfrac{318}{5000}$
   - $p(T \cap M) = \dfrac{18}{5000} = \dfrac{9}{2500}$
2. On calcule la probabilité que le test soit positif **sachant que** la personne est malade : $\dfrac{18}{20} = 0,9$.
3. Léa a été dépistée positive.
   On calcule la probabilité que Léa soit malade : $\dfrac{18}{318} \approx 0,06$. Elle a donc 6 % de risque d'être malade. On peut penser que ce test n'est pas fiable.

A et B désignent deux événements d'un univers Ω et p une probabilité sur Ω.

I Probabilité conditionnelle

Dans ce paragraphe, on considère que $p(A) \neq 0$.

I.1 Définition

Définition d'une probabilité conditionnelle

$p_A(B)$ désigne la probabilité que l'événement B soit réalisé sachant que A est réalisé.
On dit que c'est une probabilité conditionnelle.

Exemple
On donne ci-contre la répartition des spectateurs sur une journée dans une salle de cinéma selon les séances et le tarif.
On choisit un de ces spectateurs au hasard et on considère les événements :

- M : « La personne a assisté à la séance du matin ».
- D : « La personne a payé demi-tarif ».

	Plein tarif	Demi Tarif	Total
Séance du matin	103	91	194
Séance du soir	280	26	306
Total	383	117	500

La probabilité que la personne ait assisté à la séance du matin sachant qu'elle a payé demi-tarif est : $p_D(M) = \dfrac{91}{117}$ car parmi les 117 personnes ayant payé demi-tarif, 91 sont venues le matin.
De même, $p_M(D)$, la probabilité que la personne ait payé demi-tarif, sachant qu'elle a assisté à la séance du matin est $\dfrac{91}{194}$.
.

Définition

La propriété de B sachant que A est réalisé est $p_A(B) = \dfrac{p[A \cap B]}{p(A)}$

Remarque : on lit souvent « probabilité de B sachant A »

Exemple : on tire une carte dans un jeu de 32 cartes :
Rappel : dans un jeu de 32 cartes, il y a quatre couleurs (trèfle, carreau, cœur et pique) et les cartes sont 8 ; 9 ; 10 ; valet ; Dame ; Roi et As.

On note :

- A l'événement « la carte tirée est un cœur »
- B : « le résultat est un valet »

On a : $p(A) = \dfrac{1}{4}$; $p(B) = \dfrac{1}{8}$
$p(A \cap B) = \dfrac{1}{32}$.
On en déduit que la probabilité $P_A(B)$ d'avoir un valet, sachant que l'on a tiré un cœur, est :
$p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)} = \dfrac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{32} \times \dfrac{4}{1} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$.

Remarque : $p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{32}}{\frac{1}{8}} = \dfrac{1}{32} \times 8 = \dfrac{1}{4}$.

Òn constate que $\boxed{p_A(B) \neq p_B(A)}$.

I.2 Propriété

Propriété

Soient A et B deux événements de probabilités non nulles.

- $p(A\cap B) = p_A(B) \times p(A)$ et $p(A\cap B) = p_B(A) \times p(B)$
- $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$

Démonstration :

- $p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)}$ donc $p(A\cap B) = p_A(B) \times p(A)$
- De même : $p_B(A) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}$ donc $p(A\cap B) = p_B(A) \times p(B)$
- On a : $A = (A\cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$ (car les éléments de A sont de deux sortes : ceux qui appartient à B et ceux qui n'appartiennent pas à B).
  L'intersection de $(A\cap B)$ et de $\left(A\cap\overline{B}\right)$ est vide : $(A\cap B)\cap\left(A\cap\overline{B}\right) = \emptyset$.
  On en déduit que $p(A\cap B) + p\left(A\cap\overline{B}\right) = p(A)$.
  Alors : $p_A(B) = \dfrac{p(A\cap B)}{p(A)} = \dfrac{p(A) - p\left(A\cap\overline{B}\right)}{p(A)} = \dfrac{p(A)}{p(A)} - \dfrac{p\left(A\cap\overline{B}\right)}{p(A)} = \boxed{1 - p_A\left(\overline{B}\right)}$.

Exemple :

À la montagne, 80 % des vacanciers pratiquent le ski alpin et 20 % la randonnée en raquettes.
60 % des skieurs et 50 % des randonneurs sont des hommes.
On choisit un vacancier au hasard.
O, note :

- S l'événement : « le vacancier choisi pratique le ski »
- H l'événement : « le vacancier choisi est un homme ».

D'après l'énoncé : $p(S) = 80\,\% = 0,8$; $p_S(H) = 60\,\% = 0,6$.
On en déduit : $p(S\cap H) = p_S(H) \times p(S) = 0,6 \times 0,8 = 0,48$.
La probabilité que le vacancier choisi soit un homme et pratique le ski est 0,48.
On a : $p_S\left(\overline{H}\right) = 1 - p_S(H) = 0,4$.
La probabilité que le vacancier choisi soit une femme, sachant qu'il pratique le ski est 0,4.

I.3 Utilisation d'un tableau

Exemple :

Un professeur de mathématiques a trié sa bibliothèque dans laquelle figurent 32 manuels de différents niveaux, certains étant conformes aux programmes actuels et d'autres, plus vieux, n'y étant pas conformes.
La répartition de ces manuels est donnée par le tableau ci-dessous :

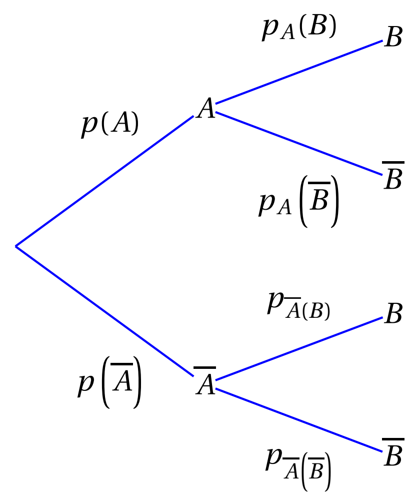
	Conforme	Non conforme	Total
Seconde	9	8	17
Première	3	5	8
Terminale	1	6	7
Total	13	19	32

Il prend un de ces manuels au hasard et on considère les événements :

- C : « Le manuel est conforme aux programmes actuels. »
- S : « Le manuel est un manuel de Seconde ».
- T : « Le manuel est un manuel de Terminale »

1. Calculer $p(C)$, $p(S)$ et $p(T)$.
2. Calculer $p_T(C)$ et $p_C(T)$.
3. Calculer $p_C\left(\overline{S}\right)$ et $_{\overline{S}}(C)$.

I.4 Utilisation d'un arbre pondéré



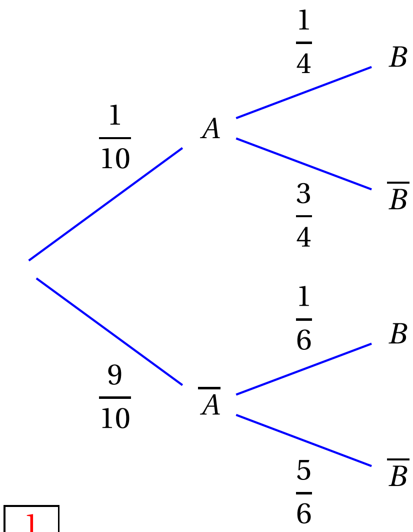
Exemple :

On considère un jeu dans lequel on lance d'abord un dé à 10 faces puis :

- si le résultat est 10, on lance un dé à 4 faces;
- sinon on lance un dé à 6 faces.

On gagne lorsque le résultat du deuxième dé est 1.
On considère les événements A : « Le résultat du premier dé est 10 » et B : « le joueur gagne ».

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous représentant la situation.



2. $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{10} = \boxed{\frac{1}{40}}$.
3. On veut calculer $p(B)$;
   $= (B \cap A) \cup \left(B \cap \overline{A}\right)$.
   On a réunion de deux événements incompatibles, donc la probabilité de cette réunion est la somme des probabilités.
   $p(B) = p(B \cap A) + p\left(B \cap \overline{A}\right) = p_A(B) \times p(A) + p_{\overline{A}}(B) \times p\left(\overline{A}\right) = \frac{1}{40} + \frac{1}{6} \times \frac{9}{10} = \frac{1}{40} + \frac{\cancel{3} \times 3}{\cancel{3} \times 2 \times 10} = \frac{1}{40} + \frac{3}{20} = \frac{7}{40}$.
   La probabilité de gagner est $\boxed{p(B) = \frac{7}{40}}$

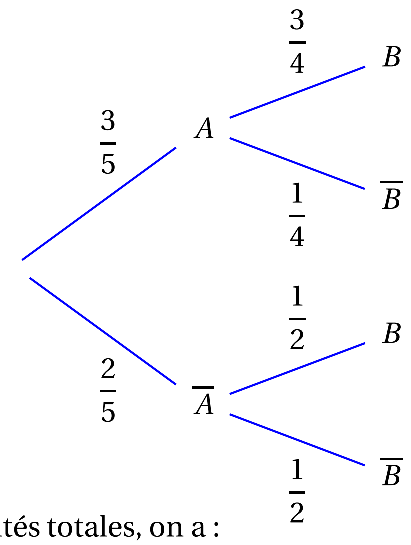
I.5 Formule des probabilités totales

Propriété (formule des robabilités totales)

Soit Ω l'univers associé à une expérience aléatoire.
Soieit des événements A_1, A_2, $\ldots A_n$ des évenements de Ω, deux à deux disjoints (d'intersection vide) et dont la réunion forme l'univers Ω.
On dit que cesévénements forment une partition de Ω.
Soit B un événement.
Alors : $p(B) = p\left(A_1 \cap B\right) + p\left(A_2 \cap B\right) + p\left(A_3 \cap B\right) + \cdots + p\left(A_n \cap B\right)$

Exemple

Un footballeur tire successivement deux pénaltys. A est l'évènernent « Il marque le premier pénalty » et B l'évènernent « Il marque le second pénalty ».
On a représenté cette expérience aléatoire sur l'arbre ci-dessous.



En appliquant la formule des probabilités totales, on a :
$p(B) = p(B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = \frac{3}{4} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{9}{20} + \frac{1}{5} = \boxed{\frac{13}{20}}$
La probabilité qu'il marque le deuxième pénalty est $\frac{13}{20}$.

II Événéments indépendants

Définition

Soient deux événements A et B de probabilités non nulles.
On dit que A et B sont indépendants lorsque $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Propriété

A et B sont indépendants équivaut à $p_A(B) = p(B)$ et $p_B(A) = p(A)$.

Démonstration :

- Si A et B sont indépendants, $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$; or $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A)$ donc :
  $p(A) \times p(B) = p_A(B) \times p(A)$.
  En divisant par $p(A) \neq 0$, on obtient : $p_A(B) = p(B)$.
  De même, $p(A \cap B) = p_B(A) \times p(B)$ donc $p(A) \times p(B) = p_B(A) \times p(B)$, d'où, en divisant par $p(B)$ś$neq0$:
  $p_B(A) = p(A)$.
- Réciproque : on suppose que $p_A(B) = p(B)$.
  Alors : $p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = p(B) \times p(A) = p(A) \times p(B)$ donc A et B sont indépendants.
  De même si $p_B(A) = p(A)$

Remarque : $p_B(A) = p(A)$ signifie que la réalisation de B n'a pas d'influence sur la réalisation de A.

⚠ : ne pas confondre événements incompatibles $A \cap B = \emptyset$ et indépendants.

Exercice.
On suppose que A et B sont indépendants.
Montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants, de même que $\overline{A}$ et B, de même que $\overline{A}$ et $\overline{B}$.

Solution.
Puisque A et B sont indépendants, $p(A \cap B) = p(A)p(B)$.

- Pour montrer que A et $\overline{B}$ sont indépendants, on doit montrer que $P\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) \times p\left(\overline{B}\right)$.
  Or : $A = (A \cap B) \cup \left(A \cap \overline{B}\right)$ (reunion d'événements incompatibles, puisque leur intersection est vide).
  Donc $p(A) = p(A \cap B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$.
  Par conséquent : $p(A) = p(A) \times p(B) + p\left(A \cap \overline{B}\right)$.
  Alors : $p\left(A \cap \overline{B}\right) = p(A) - p(A) \times p(B) = p(A)\left(1 - p(B)\right) = p(A) \times p\left(\overline{B}\right)$ c.q.f.d.
- En échangeant les rôles de A et B, on obtient la deuxième formule.
- $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right) = p\left(\overline{A \cup B}\right) = 1 - p(A \cup B)$
  $= 1 - \left[p(A) + p(B) - p(A \cap \cap B)\right] = 1 - \left[p(A) + p(B) - p(A) \times p(B)\right]$ (car $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$)
  $= 1 - p(A) - p(B) + p(A)p(B) = 1 - p(B) - p(A) + p(A)p(B) = 1 - p(B) - \left[p(A) - p(A)p(B)\right]$
  $= 1 - p(B) - p(A)(1 - p(B))$ en mettant $p(A)$ en facteur
  $= \left(1 - p(B)\right)(1 - p(A))$ en mettant $1 - p(B)$ en facteur
  $= p\left(\overline{B}\right) \times p\left(\overline{A}\right) = \boxed{p\left(\overline{A}\right) \times p\left(\overline{B}\right)}$ c.q.f.d.